Semnale, circuite şi sisteme 2

1. Introducere:

Scop:
Prezentarea unor noțiuni de complexitate mai ridicată, cu orientare aplicativă în comunicații, proiectarea circuitelor, control şi sinteză de filtre analogice.
Tipuri de aplicații:
- Prelucrarea semnalelor prin metode de modulație;
- Calculul răspunsului circuitelor liniare (ex. Filtrarea semnalelor modulate);
- Calculul răspunsului circuitelor neliniare (ex. Modulația);
- Stabilizarea circuitelor electronice
- Proiectarea oscilatoarelor;
- Stabilizarea buclelor de control, în electronica aplicată;
- Sinteza filtrelor liniare.

Discipline anterioare recomandate:
Semnale, circuite şi sisteme 1, Dispozitive electronice, Bazele electrotehnicii, Matematici speciale.

Cuprins:
1. Semnale modulate şi răspunsul filtrelor la semnale modulate
2. Stabilitatea circuitelor analogice cu reacție
3. Ecuații de stare analogice
4. Introducere în sinteza filtrelor analogice

Bibliografie:

1. Suport de curs: http://scs.etc.tuiasi.ro/vgrigoras/didactic.html
2. Gh. Cartianu s.a., Semnale, circuite şi sisteme, Editura Didactică şi Pedagogică (EDP), 1980;
3. Ad. Mateescu, Semnale, circuite şi sisteme, EDP, 1984;
4. Mugur Săvescu s.a., Semnale, circuite şi sisteme - culegere de probleme, (EDP), 1981.

2. Semnale modulate

2.1. Noțiuni introductive:

Scopuri şi exemple de aplicații:
- Transmiterea informației (adaptarea semnalelor la caracteristicile canalului de comnicații, multiplexarea mai multor semnale pe acelaşi canal);
- Prelucrarea, transmiterea şi stocarea energiei electrice.

Modulația este o prelucrare **neliniară** de semnal, care permite grefarea informației unui semnal util (**semnal modulator**) pe parametrii unui semnal determinist, uzual de frecvență mai ridicată, (**semnal purtător**) rezultând **semnalul modulat**.

Clasificare:
1. După forma semnalului purtător:
   - Cu purtător armonic
   - Cu purtător în impulsuri
   - Cu purtator de bandă largă (pseudo-aleator)
2. După parametrul modulat:
   - De amplitudine
   - De fază sau frecvență

2.2. Elemente recapitulative:

1.1.1 Transformata Laplace:

Definiție: operator L, definit printr+o integrală bilaterală (de la –inf. la +inf.):

$$L:\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{C}}: \quad L\left(x(t)\right) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt$$

Transformata inversă:

$$L^{-1}:\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}: \quad L^{-1}\left(X(s)\right) = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(s)\cdot e^{st}ds$$

Proprietăți:

1. Liniaritate:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$$

2. Întârzierea originalului:

$$x(t) = x_0(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = e^{-s\cdot t_0}\cdot X_0(s)$$

3. Deplasarea transformatei:

$$x(t) = e^{s_0\cdot t}\cdot x_0(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = X_0(s-s_0)$$

4. Derivarea originalului:

$$x(t) = x_0\,'(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = s\cdot X_0(s)$$

5. Integrarea originalului:

$$x(t) = \int x_0(t)\cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}\cdot X_0(s)$$

6. Convoluția în domeniul timp:

$$y(t) = e(t) * h(t) = \int e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = E(s)\cdot H(s)$$

Aplicarea *transformatei Laplace* la **algebrizarea ecuațiilor diferențiale** care descriu funcționarea circuitelor analogice, liniare şi invariante în timp:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{M} b_m e^{(m)}(t); \quad N \geq M, \quad N - ordinul\ sistemului$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n s^n Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m E(s)$$

$$Y(s)\sum_{n=0}^{N} a_n s^n = E(s)\sum_{m=0}^{M} b_m s^m$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{n=0}^{N} a_n s^n}; \quad N \geq M$$

Transformate Laplace elementare:

$$x(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = 1$$

$$x(t) = \delta(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = 1\cdot e^{-st_0}$$

$$x(t) = \sigma(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

$$x(t) = \sigma(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}\cdot e^{-st_0}$$

$$x(t) = \sigma(t)\cdot e^{-at} \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+a}$$

1.1.2 Transformata Fourier

Definiție: operator integral, *F*:

$$F:\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}}: \quad F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

Transformata inversă:

$$F^{-1}:\mathbb{C}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}: \quad F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

Proprietăți:

1. Proprietăți fundamentale;
2. Proprietăți de simetrie;
3. Proprietăți energetice.

1. Proprietăți fundamentale:

1.1. Liniaritate:

$$x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$$

1.2. Întârzierea originalului:

$$x(t) = x_0(t-t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = e^{-j\omega\cdot t_0}\cdot X_0(\omega)$$

1.3. Deplasarea transformatei:

$$x(t) = e^{j\omega_0\cdot t}\cdot x_0(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = X_0(\omega-\omega_0)$$

1.4. Derivarea originalului:

$$x(t) = x_0{}'(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = j\omega\cdot X_0(\omega)$$

1.5. Integrarea originalului:

$$x(t) = \int x_0(t)\cdot dt \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega}\cdot X_0(\omega)$$

1.6. Convoluția în domeniul timp:

$$y(t) = e(t)*h(t) = \int e(\tau)\cdot h(t-\tau)d\tau \quad \Leftrightarrow \quad Y(\omega) = E(\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$$

1.7.Dualitatea timp-frecvență:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad X(t) \leftrightarrow 2\pi\cdot x(-\omega)$$

1.8. Produs algebric în timp:

$$s(t) = m(t)\cdot p(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi}M(\omega)*P(\omega)$$

2. Proprietăți de simetrie:

2.1. Inversarea axei timpului:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$$

2.2. Conjugarea originalului:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega)$$

2.3. Semnale reale:

$$x(t)\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega)\,par \quad \Leftrightarrow \quad X(-\omega) = X^*(\omega) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \measuredangle X(-\omega) = -\measuredangle X(\omega) \end{cases}$$

2.4. Semnale pare:

$X(\omega) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x(t)\,par \quad \Leftrightarrow \quad x(-t) = x^*(t) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x(-t)| = |x(t)| \\ \measuredangle x(-t) = -\measuredangle x(t) \end{cases}$$

2.5. Semnale impare:

$X(\omega) \in I \quad \Leftrightarrow \quad x(t)\,impar \quad \Leftrightarrow \quad x(-t) = -x^*(t) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x(-t)| = |x(t)| \\ \measuredangle x(-t) = \pi - \measuredangle x(t) \end{cases}$$

2.6. Semnale pur imaginare:

$x(t) \in I \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega)\,impar \quad \Leftrightarrow \quad X(-\omega) = -X^*(\omega) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \measuredangle X(-\omega) = \pi - \measuredangle X(\omega) \end{cases}$$

3. Proprietăți energetice:

3.1. Teorema Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot Y^*(\omega)d\omega$$

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle X(\omega), Y(\omega)\rangle$$

3.2. Echivalența energiilor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot x^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot X^*(\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\|x(t)\| = \frac{1}{2\pi}\|X(\omega)\|$$

Transformate Fourier elementare:

F este particularizarea *L* pentru regim premanent ($s = j\omega$).

Putem calcula transformatele Fourier ale unor semnale plecând de la transformatele Laplace şi înlocuind $s = j\omega$, numai dacă:

- $\exists X(s) = L\big(x(t)\big)$
- X(s) nu are poli pe axa imaginară

$x(t) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = 1$

Judecând dual:

$x(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$x(t) = \sigma(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$x(t) = \sigma(t)\cdot e^{-at} \quad \Leftrightarrow \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

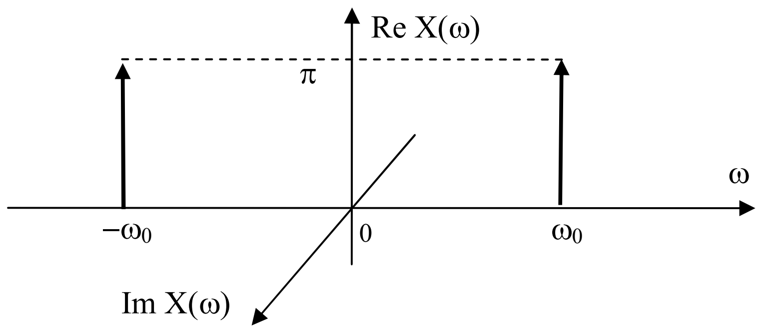
Aplicând proprietățile transformatei Fourier:

$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$

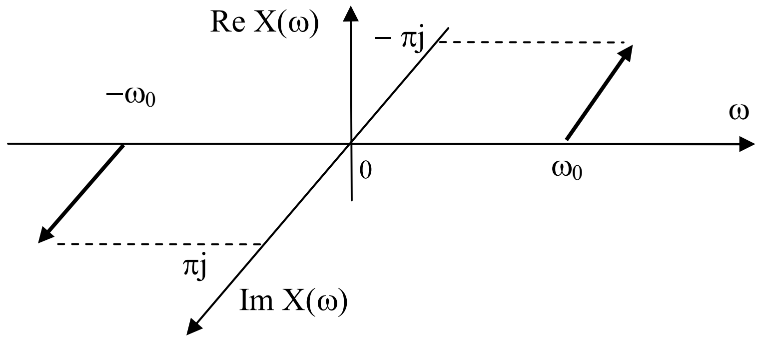
$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Utilizând **relațiile lui Euler**:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = \pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

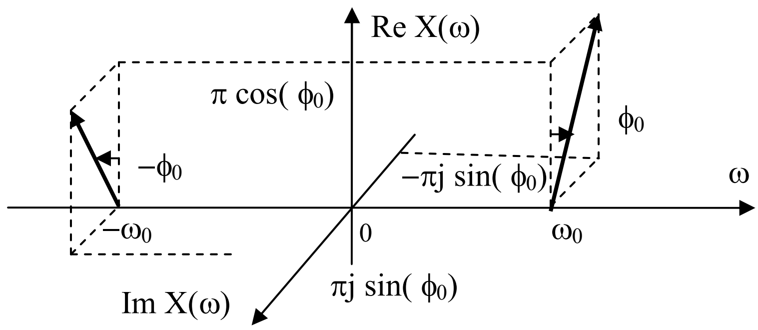


$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega) = -\pi j\left(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right)$$



$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}}{2} = \frac{e^{j\varphi_0}}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} e^{-j\omega_0 t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X(j\omega) = \pi e^{j\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0) + \pi e^{-j\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)$$



2.3. *Modulația de amplitudine*

Semnalul purtător este un semnal determinist, uzual periodic şi de frecvență ridicată (în raport cu semnalul modulator), pe amplitudinea căruia se grefează semnalul modulator.

Semnalul modulator este semnalul util, purtător de informație, uzual lent variabil în raport cu semnalul purtător.

Modulația de amplitudine este procesul de grefare a semnalului modulator pe amplitudinea celui purtător.

Semnalul modulat în amplitudine este rezultatul procesului de modulație şi este necesar să conțină toată informația purtată de semnalul modulator.

Demodularea de amplitudine este procesul invers modulării, constând în refacerea semnalului modulator din semnalul modulat în amplitudine.

$$s_{MA}(t) = m(t) \cdot p(t)$$

$$S_{MA}(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * P(\omega)$$

2.3.1. Modulația de amplitudine cu purtător armonic

Semnalul purtător:

$$p(t) = \cos(\omega_p t)$$

$$s_{MA}(t) = m(t) \cdot p(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

$$F\left\{\cos(\omega_p t)\right\} = P(\omega) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)\right)$$

$$S_{MA}(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * \pi\left(\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)\right) = \frac{1}{2}\left(M(\omega - \omega_p) + M(\omega + \omega_p)\right)$$

În cazul particular al semnalului modulator armonic:

$$m(t) = M_0 + M_1 \cos(\omega_m t) = M_0\left(1 + m \cdot \cos(\omega_m t)\right); \quad m = \frac{M_1}{M_0}$$

$$s_{MA}(t) = m(t) \cdot p(t) = M_0\left(1 + m \cdot \cos(\omega_m t)\right) \cdot \cos(\omega_p t); \quad \omega_p > \omega_m$$

$$M(\omega) = F\left\{M_0\left(1 + m \cdot \cos(\omega_m t)\right)\right\} = 2\pi M_0 \delta(\omega) + \pi M_0 m\left(\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)\right)$$

$$S_{MA}(\omega) = \frac{1}{2}\left(M(\omega - \omega_p) + M(\omega + \omega_p)\right) =$$

$$= \pi M_0 \delta(\omega - \omega_p) + \frac{\pi M_0 m}{2}\left(\delta(\omega - \omega_p - \omega_m) + \delta(\omega - \omega_p + \omega_m)\right) +$$

$$+ \pi M_0 \delta(\omega + \omega_p) + \frac{\pi M_0 m}{2}\left(\delta(\omega + \omega_p - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_p + \omega_m)\right)$$

Diagrama de modulatie; m<1

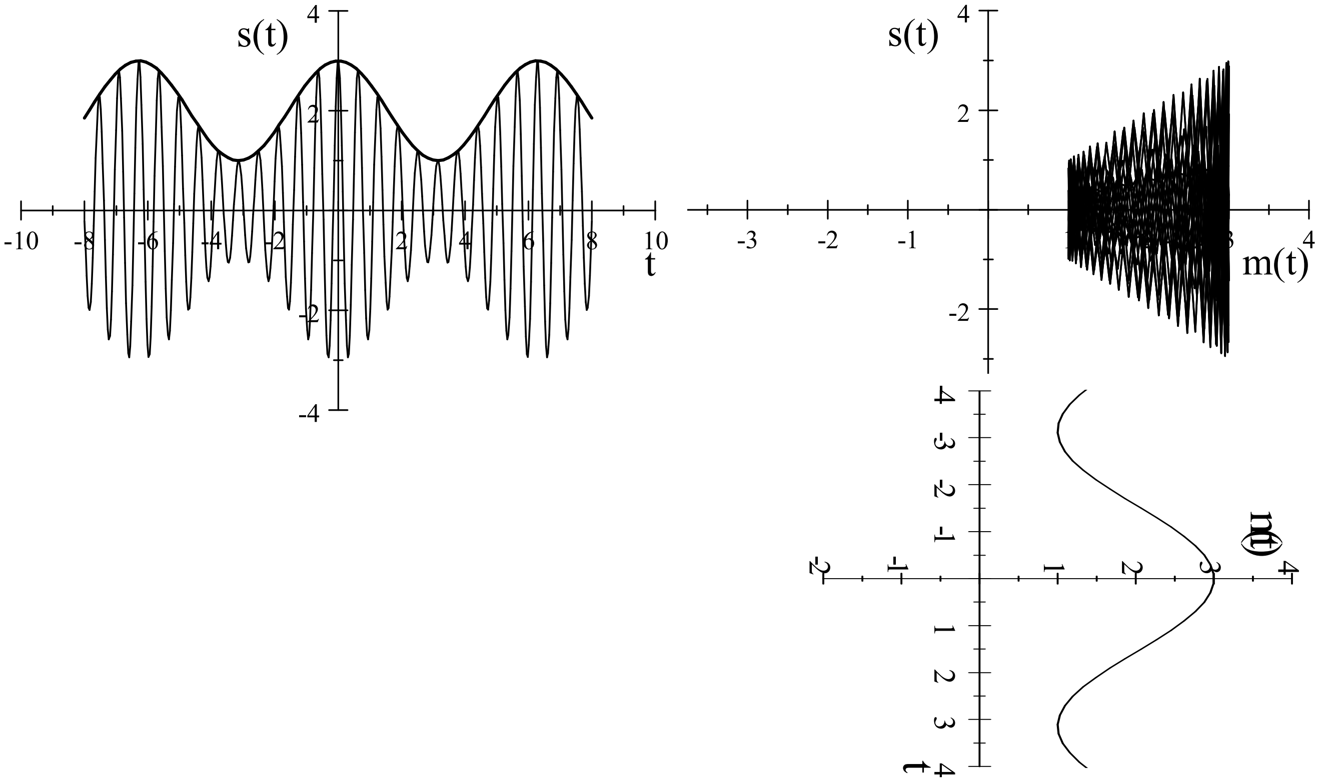


Diagrama de modulatie; m=1

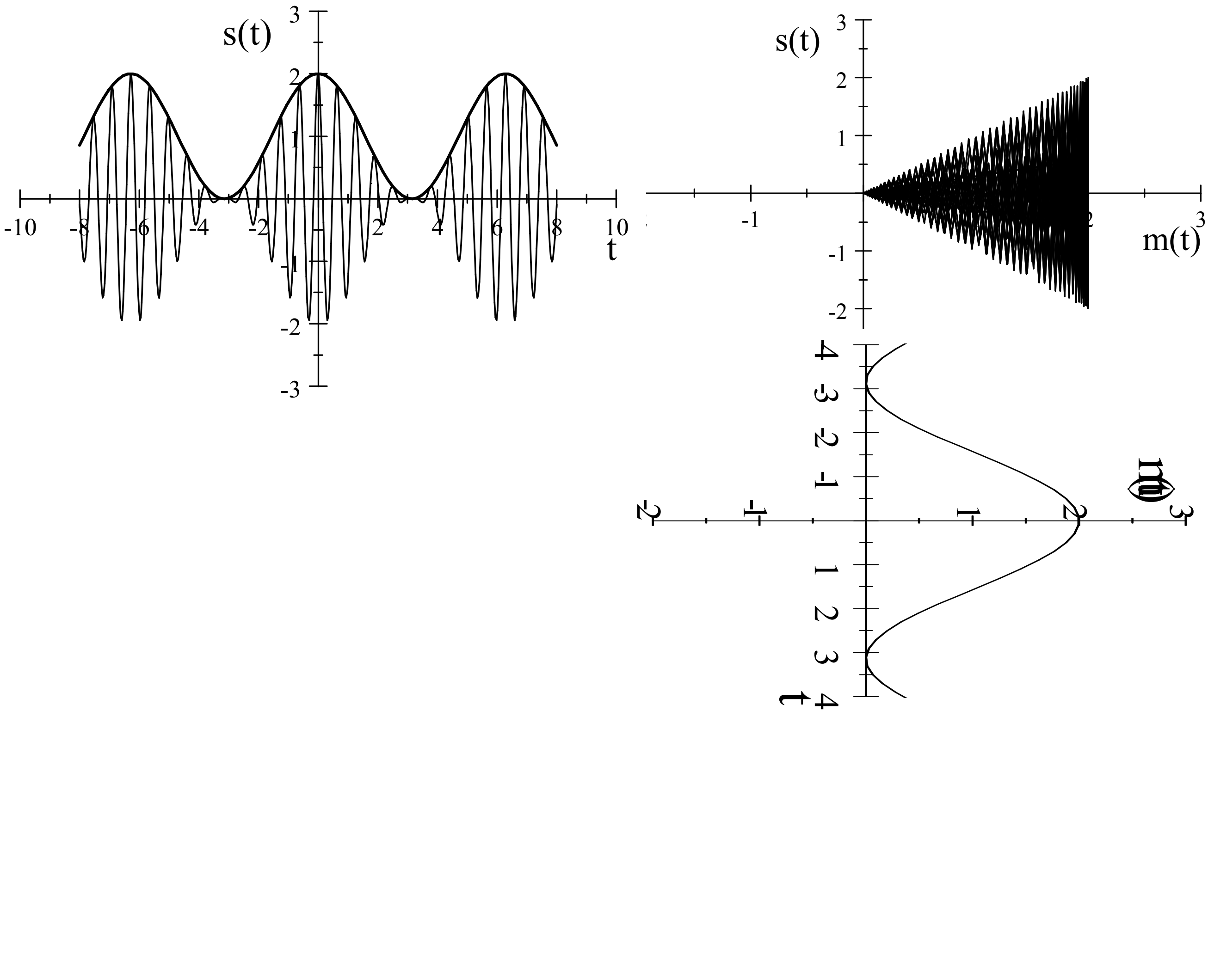


Diagrama de modulatie; m>1

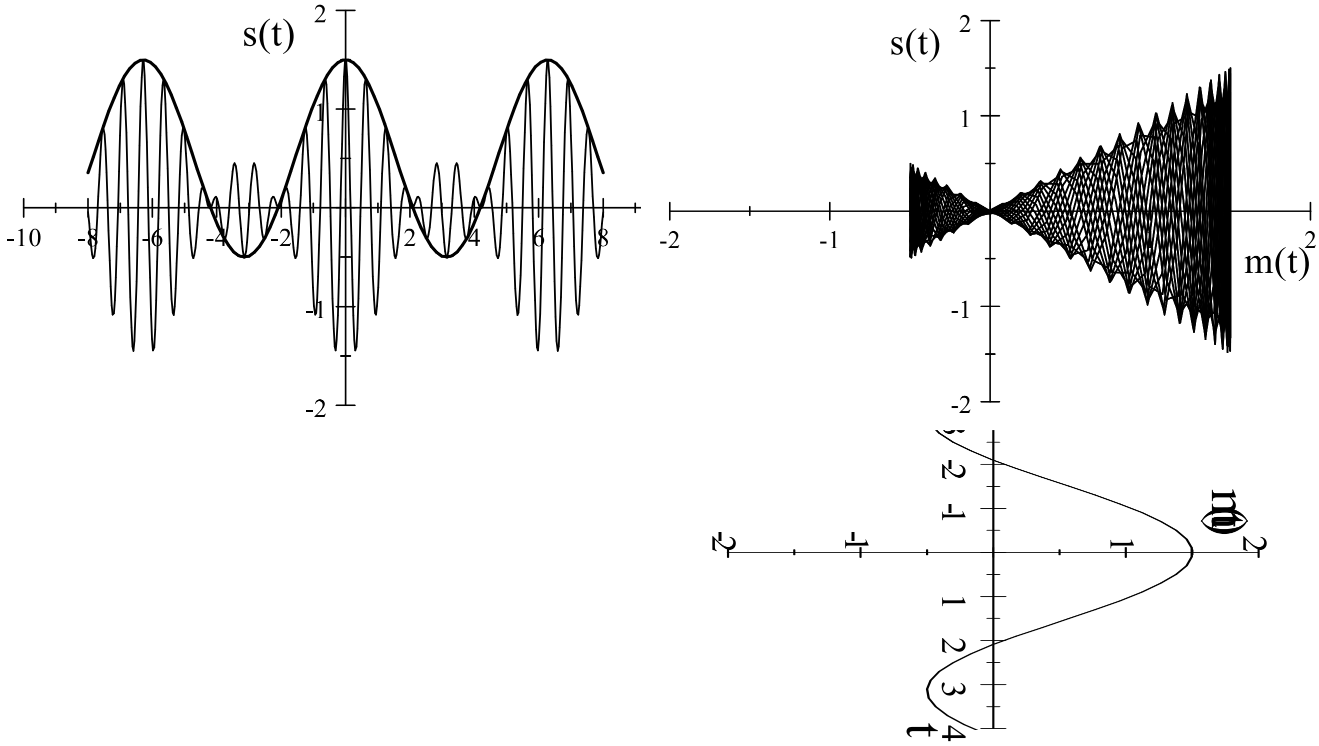


Diagrama de modulatie; m infinit MAPS