Laboratorul nr 8

Proprietatile transformatei Fourier discrete (DFT)

Transforma Fourier discreta a unui semnal x[n] definit pe un domeniu discret [0:N-1] este:

$$DFT\{x[n]\}: \qquad X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (1.1)$$

De multe ori se face notatia $w_N = e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}}$ si atunci relatia de mai sus devine:

$$DFT\{x[n]\}: \qquad X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot {w_N}^{nk} \qquad (1.2)$$

Relatia inversa este :

$$IDFT\{X[k]\}: \qquad \mathrm{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot e^{j\cdot\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (1.3)$$

sau:

$$IDFT\{X[k]\}: \qquad \mathrm{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]\cdot {w_N}^{-nk} \qquad (1.4)$$

A1: Scrieti un script in Matlab in care sa verificati urmatoarele proprietati ale transformatei Fourier discrete folosind semnalele $x_1[n]=[0\ 1\ 2\ 3\ 4]$ si $x_2[n]=[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$:

Proprietate	Timp	DFT
	$x[n]$	$X[k]$
1. Liniaritatea	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1[k]+a_2X_2[k]$

Se defineste prin $\langle n-m\rangle_N$ restul impartirii lui $n-m$ la N.

De exemplu $\langle 7\rangle_5=2$ iar $\langle -2\rangle_5=3$. In Matlab restul imparitii se poate calcula folosind functia `mod`.

A2: Folosind cei 2 vectori $x_1[n]$ si $x_2[n]$ de dimensiune N=5 definiti mai sus, afisati $x_1[<n>_5], x_1[<n-1>_5], x_1[<n-2>_5], x_1[<n-3>_5]$, $x_1[<n-4>_5]$ si $x_1[<n-5>_5]$. Pentru deplasare in timp, puteti folosi functiile `mod` (aplicata indicelor vectorului x) sau `circshift` (aplicata vectorului x) iar pentru afisare folositi functiile `subplot` (pe fiecare din cele 5 subfiguri se va reprezenta cate o varianta deplasata a lui $x_1[n]$) si `stem.` Observati cum se deplaseaza in timp esantioanele.

A3: Verificati urmatoarele doua proprietati ale DFT pentru o valoare l , aleasa de dumneavoastra.

2. Intarziere in timp	$x_1[\langle n-l \rangle_N]$	$X_1[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi kl}{N}}$
3. Deplasare in frecventa	$x_1[n] \cdot e^{j\frac{2\pi nl}{N}}$	$X_1[\langle k-l \rangle_N]$

Se defineste convolutia circulara a doua semnale $x[n], h[n]$:

$$y_C[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot h[\langle n-m \rangle_N],\ n = 0..N-1 \tag{1.5}$$

unde ambele semnale x si h au *acelasi suport* [0:N-1]. Puteti folosi functia `convcirc` (functia se gaseste in directorul l:\4ME_CIPS\lab7) sau sa creati propria dumneavoastra functie. Pentru a o putea folosi, functia `convcirc` trebuie copiata in directorul curent.

A4: Verificati urmatoarele doua proprietati ale DFT (se vor folosi functiile Matlab `fft` si `ifft` si functia `convcirc`).

4. Convolutia in timp	$x_1[n] \otimes x_2[n]$	$X_1[k] \cdot X_2[k]$
5. Produs in timp	$x_1[n] \cdot x_2[n]$	$\frac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$

Spre deosebire de convolutia circulara (1.5), convolutia liniara a doua semnale $x[n]$ si $h[n]$ se defineste ca fiind:

$$y_L[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot h[n-m] \tag{1.6}$$

unde suportul lui $x[n]$ este [0:N-1], iar a lui $h[n]$ este [0:M-1]. In acest caz dimensiunea lui $y[n]$ va fi [0:M+N-2]. Observati diferentele dintre relatiile (1.5) si (1.6).

Produsele de convolutie circulara si liniara se mai pot scrie si sub forma:

$$y_C[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[\langle n-m \rangle_N] \cdot h[m],\ n = 0..N-1$$

si respectiv (1.7)

$$y_L[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] \cdot h[m]$$

In figura de mai jos se prezinta comparativ un exemplu de convolutie liniara si unul de convolutie circulara. Se considera acelasi filtru, un semnal periodic ($x[n]$) pentru exemplificarea convolutiei liniare si un semnalul generator al semnalului periodic ($x_g[n]$) pentru exemplificarea convolutiei circulare. Se observa ca pentru o perioada a semnalului $x[n]$, atat $x[n-m]$ cat si $x_g[\langle n-m\rangle_5]$, $n=0..3$ sunt identice. In consecinta convolutia circulara este de fapt convolutia liniara aplicata semnalelor periodice.

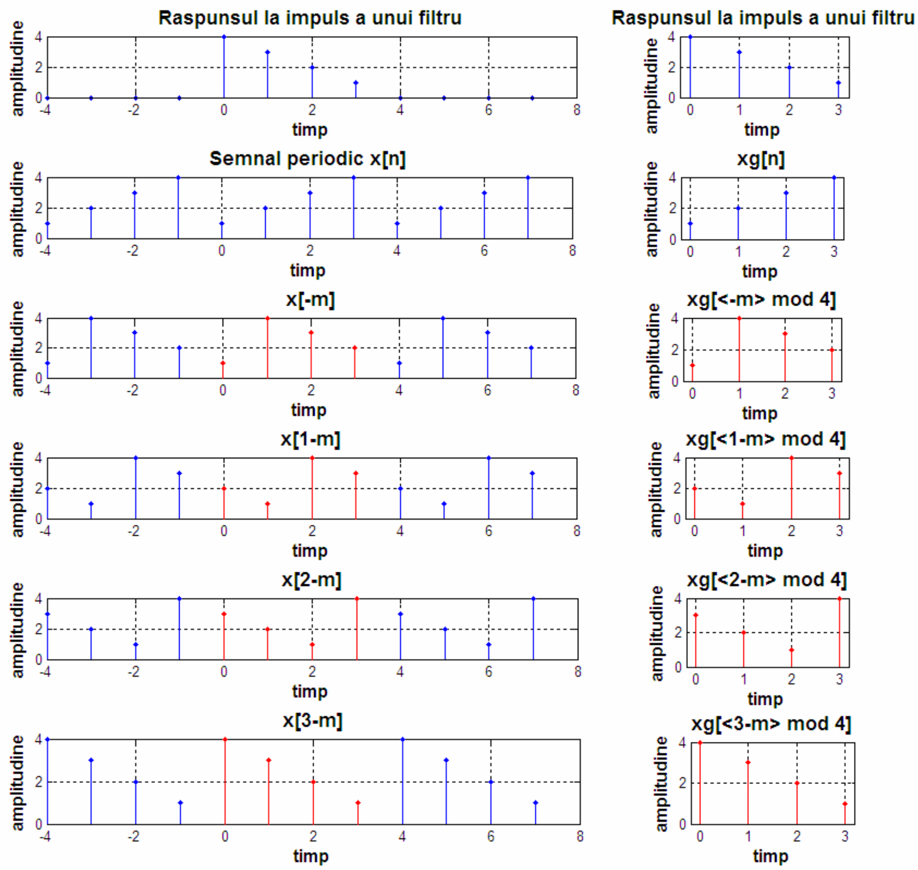

Fig 1. Exemplu de convolutie liniara (stanga) si circulara (dreapta)

A5: Sa se verifice afirmatia de mai sus pentru semnalul periodic $x[n]=[1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 2\ 3\ 4]$, semnalul generator $x_g[n]=[1\ 2\ 3\ 4]$ si acelasi sistem a carui raspuns la impuls este h[n]=[4 3 2 1] (se vor folosi functiile `conv` si `convcirc`).

Obs: Semnalul x[n] nu are suport infinit si de aceea, in cazul convolutiei liniare, afirmatia de mai sus nu este valabila pentru valorile de capetele raspunsului sistemului la $x[n]$.

Convolutia liniara a doua semnale x si h de suport [0:N-1] si respectiv [0:M-1] poate fi implementata folosind convolutia circulara. Pentru acesta se completeteaza vectorii x si h cu zerouri obtinand astfel alti 2 vectori x' si h' cu suportul [0:L-1] unde L=M+N-1.

A6: Verificati ca proprietatea de mai sus este adevarata folosind semnalele $h_L = [1\ 2\ 3]$ si $x_L = [0\ 1\ 2\ 3\ 4]$ (se vor folosi functiile `conv` si `convcirc`).

A7: Reluati aplicatia **A6** folosind proprietatea 4 a DFT prezentata mai sus (se va utiliza pentru acesta functia `fft` in loc de `convcirc`).

Deschideti fisierul test_conv_fft.m. Scriptul calculeaza convolutia dintre semnalele x si h si timpul necesar celor doua metode (s-a folosit perechea tic toc). Observati diferenta de timp in cazul folosirii functiei `conv` fata de cazul folosirii functiei `fft`.

A8: Verificati teorema lui Parseval.

6. Teorema lui Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2^*[n]$	$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_1[k] \cdot X_2^*[k]$

O consecinta a teoremei lui Parseval este ca energia unui semnal calculata in domeniul timp este egala cu cea calculata in domeniul frecventa. Verificati aceasta proprietate considerand $x_1[n] = x_2[n]$.