Technical University
of Iasi, Romania

Faculty of Electronics and
Telecommunications

Signals, Circuits and
Systems laboratory

Circuite neliniare pentru prelucrarea semnalelor

Dinamica neliniara de tip periodic

Cuprins

- Dinamica neliniara de tip periodic
  - Multimi invariante;
  - Teorema de ne-intersectie a traiectoriei;
  - Dinamica neliniara periodica analogica;
  - Dinamica neliniara periodica discreta;
  - Atractivitatea ciclurilor limita;
  - Liniarizare locala;
  - Sectiunea Poincare;
  - Exemple.

Multimi invariante

- **Definitie**: Pentru sistemul analogic de ordinul N:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

in spatiul starilor, R^N, o multime I de puncte (vectori de stare) se numeste invarianta daca:

$$\mathbf{x}_0 \in I \subset \Re^N \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}(t) \in I \quad \forall t > 0$$

- **Definitie**: pentru sisteme discrete, o multime I este invarianta daca:

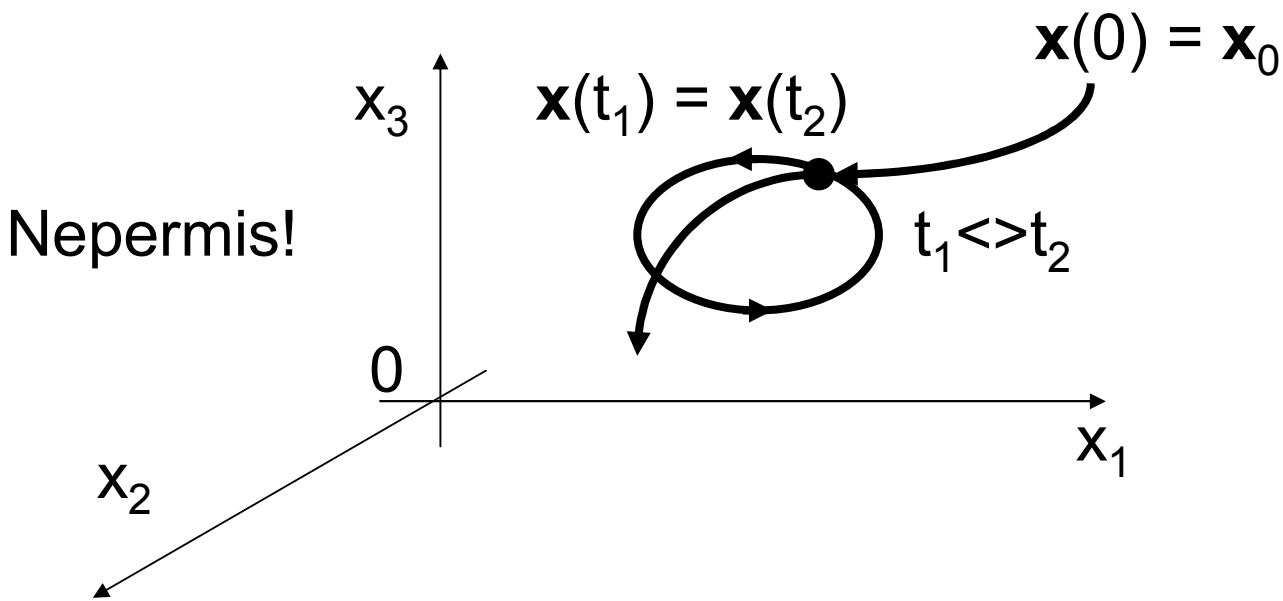
$$\mathbf{x}_0 \in I \subset \Re^N \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}[k] \in I \quad \forall k > 0$$

- Exemple:
  - totalitatea punctele de echilibru ale unui sistem analogic este o multime invarianta pentru acel sistem
  - totalitatea punctele fixe ale unui sistem discret reprezinta o multime invarianta pentru sistemul discret analizat

Teorema de ne-intersectie a traiectoriei

- **Teorema:** traiectoria evolutiei temporale a starii, **x**, unui sistem neliniar nu se poate intersecta transvers cu ea insasi.

$$\forall t_1 \neq t_2 : \mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$$



Definitia dinamicii periodice analogice

- **Dinamica periodica** este caracterizata în spațiul stărilor printr-o *mulțime invarianta* de tip *curbă simplă închisă*, denumita **ciclu limită**.
- **Definitie**: Un **ciclu limită** este o curbă $(C) \in \Re^N$ închisă si simplă, parcursă de vectorul de stare al sistemului analogic, conform condițiilor:

1. Curba (C) este multime invarianta pentru sistemul analogic:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in (C) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in (C) \quad \forall t > 0$$

2. există un interval de timp, *T*, numit *perioadă fundamentală*, reprezentând cel mai scurt interval de timp pentru care valorile vectorului de stare se repetă periodic:

$$\exists T : \forall t > 0 : \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$$

- **Observatie**: variabilele de stare (x_n , $n = 1,..,N$) sunt *semnale periodice*, toate având *aceeași perioadă fundamentală*, *T*.

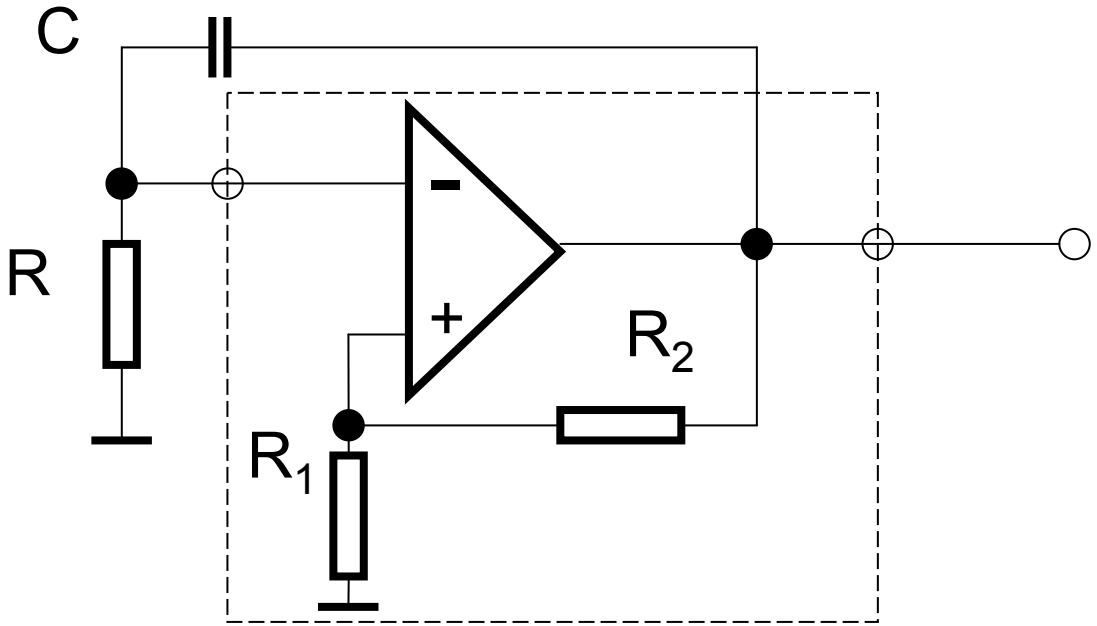
Limitari privind ordinele sistemelor analogice

- Pentru a evita autointersectia, sistemele neliniare analogice trebuie sa respecte conditiile:
  - Dinamica de tip constant ⇔ N>=1;
  - Dinamica periodica ⇔ N>1;

- Pentru sistemele in timp discret, nu exista astfel de limitari.

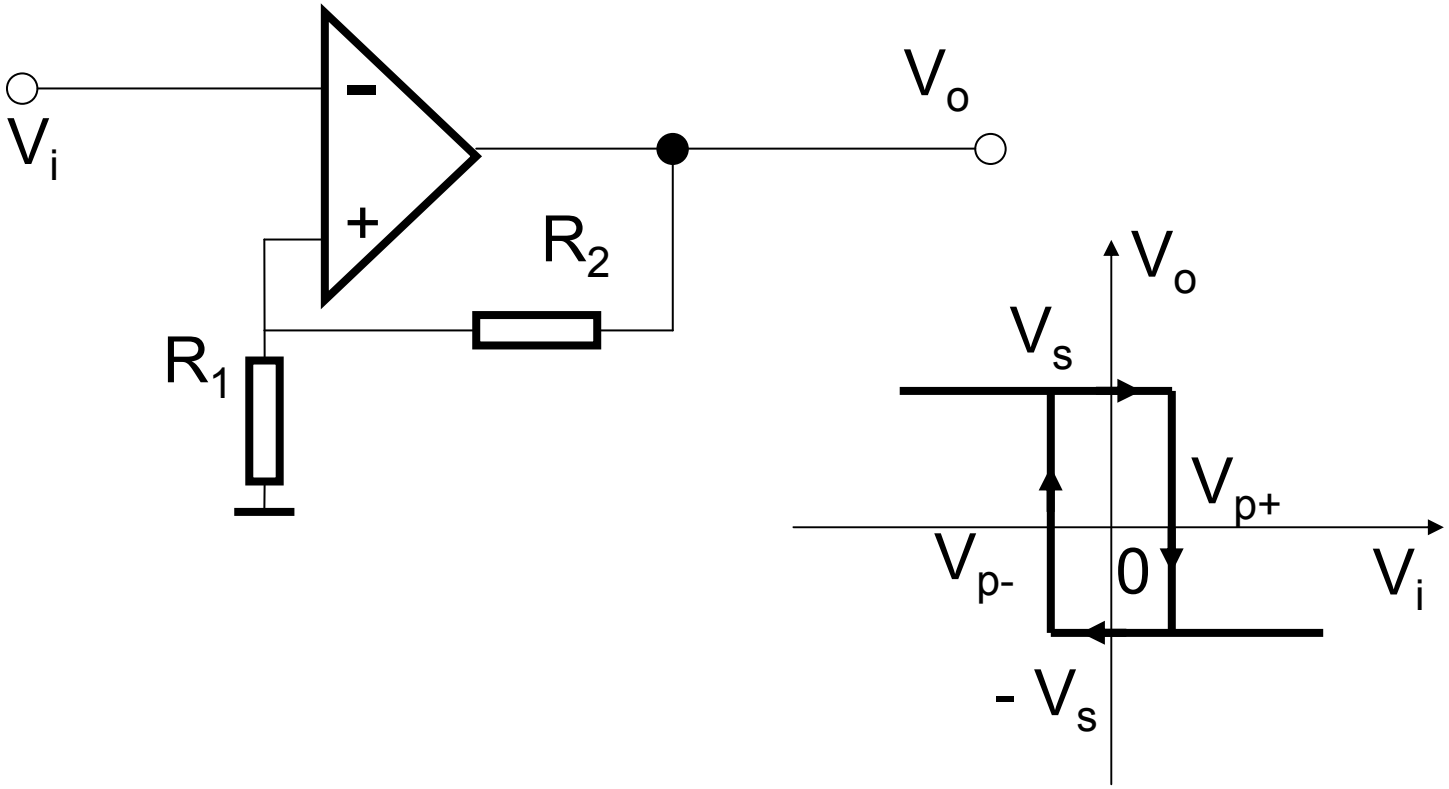
Modelul de tip histerezis

Schema urmatoare de astabil cu amplificator operational nu contine decat un singur element reactiv (condensatorul C), dar nu are ordinul 1 ci 1,5 datorita prezentei trigger-ului Schmitt cu AO, care introduce o variabila de stare cuantizata (cu doua nivele de cuantizare, +/- V_s).



Cuantizarea starilor sistemelor neliniare

- Circuitul trigger Schmitt este doar un exemplu de circuit neliniar cu variabile de stare cuantizate:

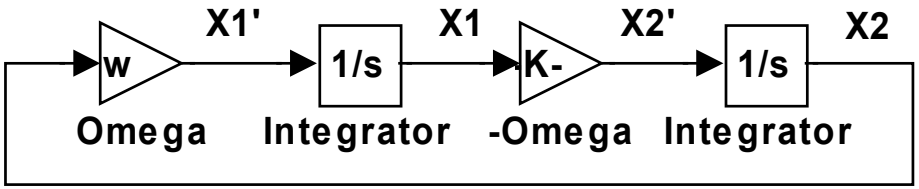


Exemplu: sistemul Van der Pol

- Se porneste de la oscilatorul armonic liniar:

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases}$$

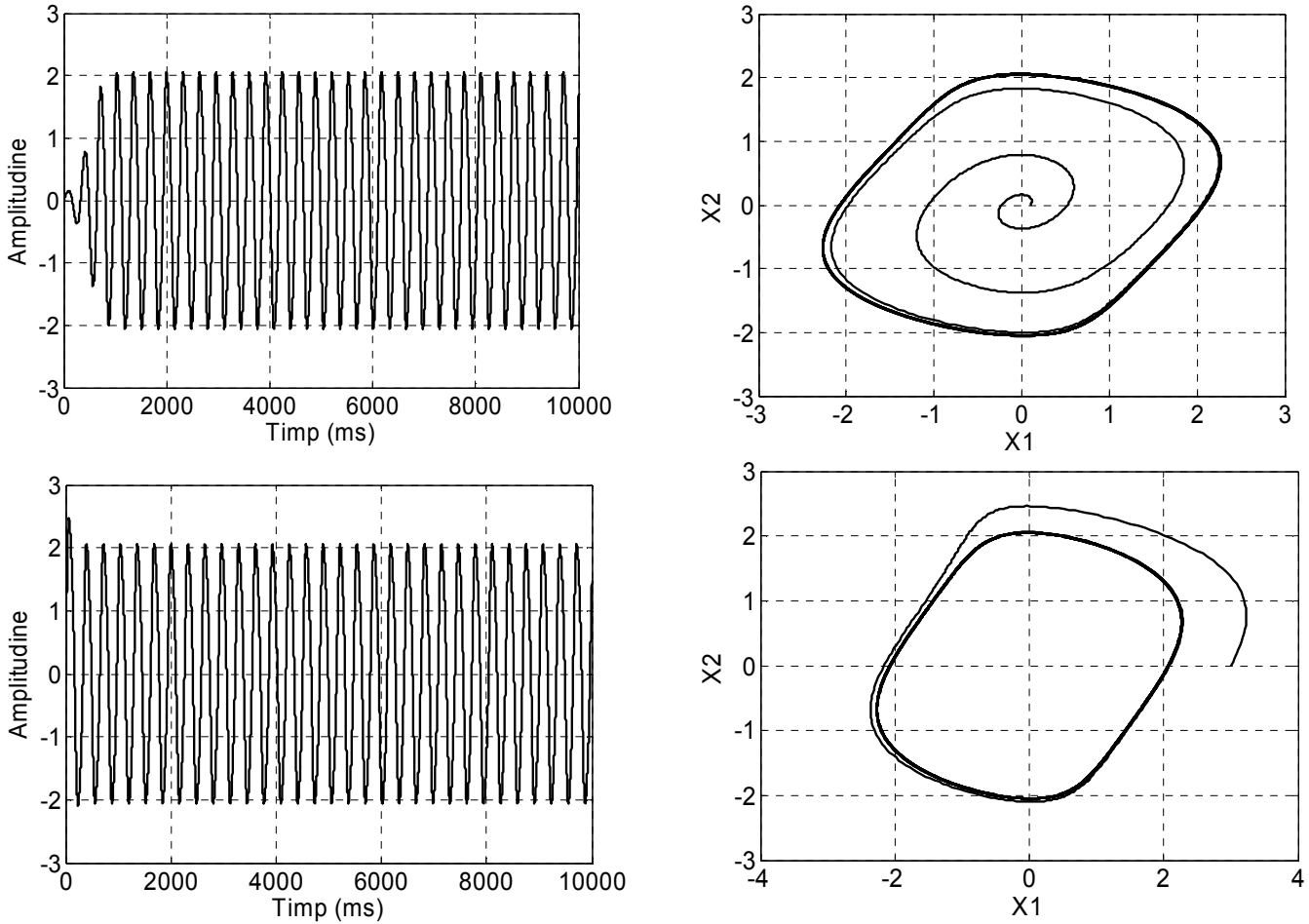
- Avand schema bloc de implementare specifica unui oscilator in cuadratura:



- Adaugandu-se termenul neliniar pentru stabilizarea amplitudinii de oscilatie:

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot \left(1 - x_2^{\,2}\right) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases}$$

Oscilatii periodice in sistemul Van der Pol



Definitia dinamicii periodice discrete

- **Definiție**: Un ciclu limită discret, este o *mulțime finită* de vectori de stare: $(C) = \{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_L\} \in \Re^N$

ai sistemului: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$

parcursă de vectorul de stare curent conform condițiilor:

1. Multimea (C) este multime invarianta pentru sistemul discret

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \in (C) \Rightarrow \mathbf{x}[k] \in (C) \quad \forall k > 0$$

2. *perioada fundamentală, L,* a sistemului discret este egală cu *numărul de vectori* din compunerea ciclului limită și reprezintă cel mai scurt interval de timp pentru care vectorul de stare *se repetă periodic*:

$$\exists L : \forall k > 0 : \mathbf{x}[k+L] = \mathbf{x}[k]$$

- **Observatie**: variabilele de stare (x_n , $n = 1,..,N$) sunt *semnale periodice*, toate având *aceeași perioadă fundamentală*, *L*.

Exemplu: sistemul Rosler

Sistemul Rosler este de ordin N = 3 si descris de ecuatiile de stare:

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x - ay \\ z' = b + xz - cz \end{cases}$$

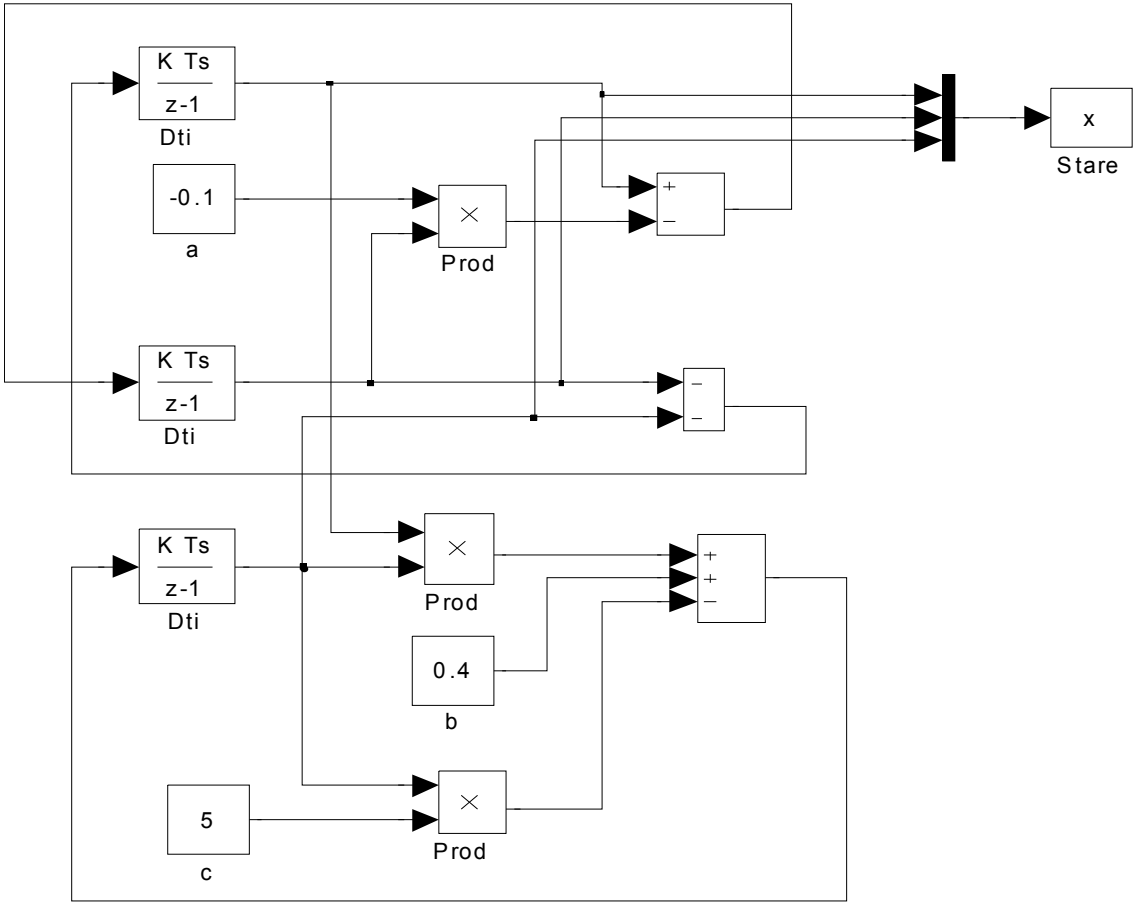
Asociidu-i sistemul discret prin metoda Euler:

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Se obtine sistemul:

$$\begin{cases} x[k+1] = x[k] - T(y + z) \\ y[k+1] = y[k] - T(x - ay) \\ z[k+1] = z[k] - T(b + xz - cz) \end{cases}$$

Sistemul Rosler discret

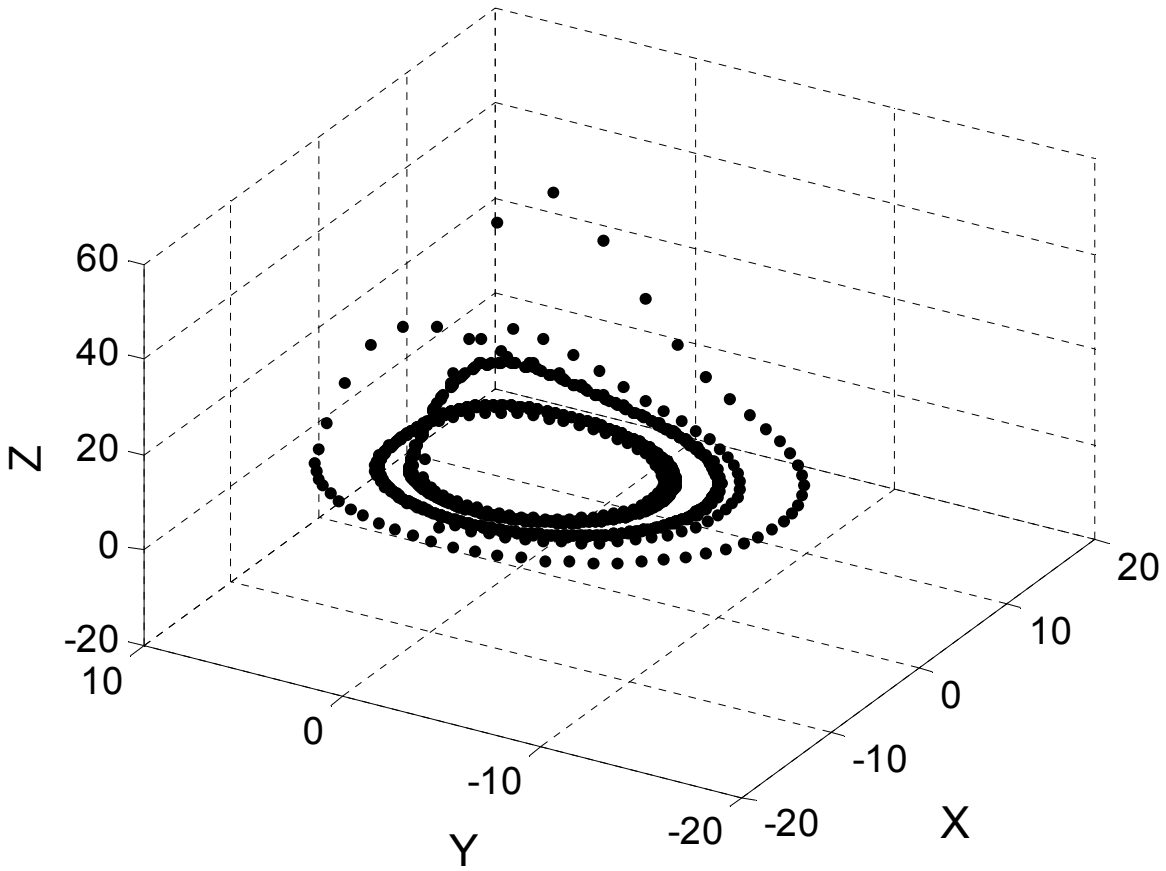


Oscilatii periodice in sistemul Rosler discret

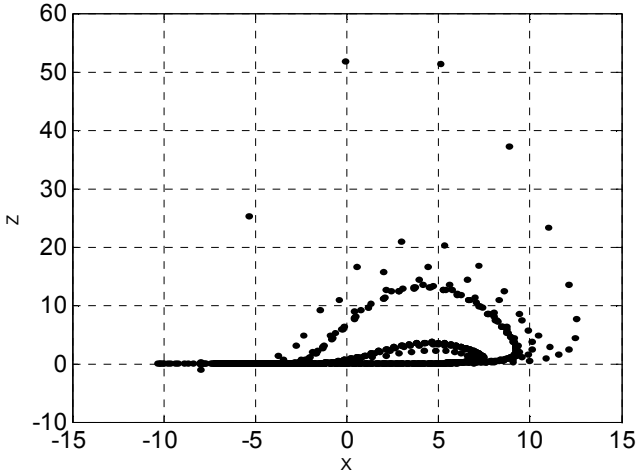
Pentru valorile coeficientilor:

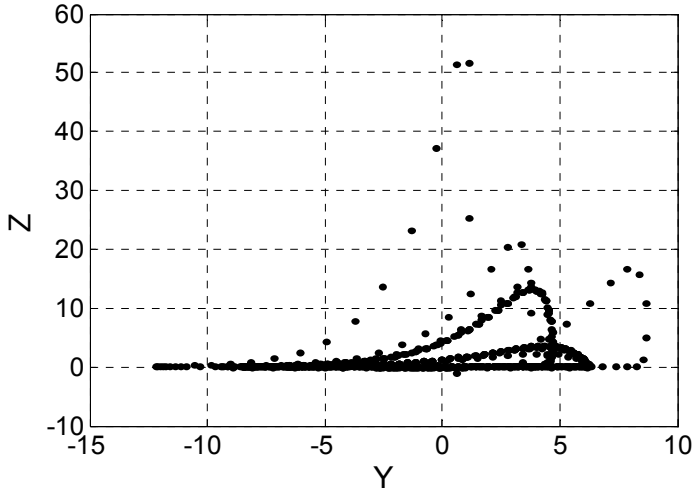
- a = -0,1,
- b = 0,4,
- c = 5,

se obtine traiectoria:

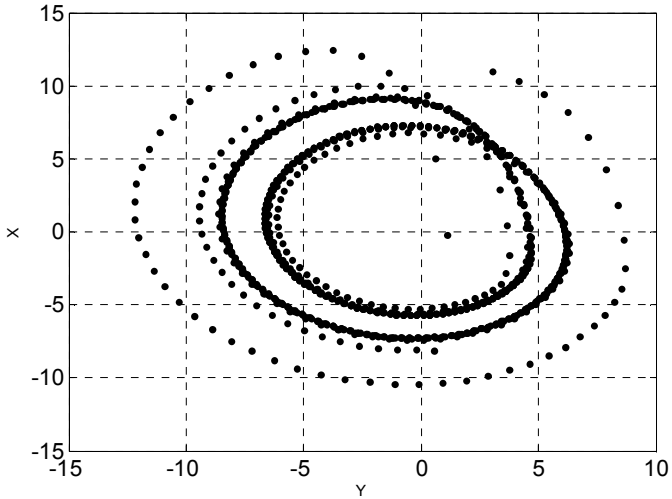


Oscilatii periodice in sistemul Rosler discret

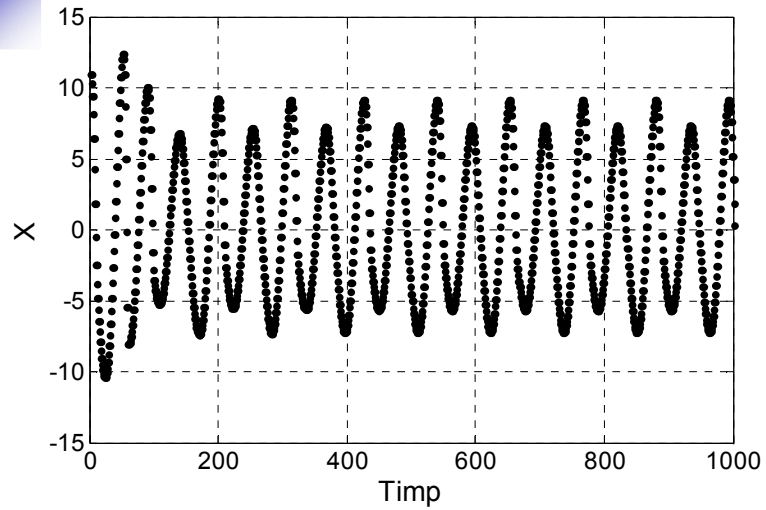


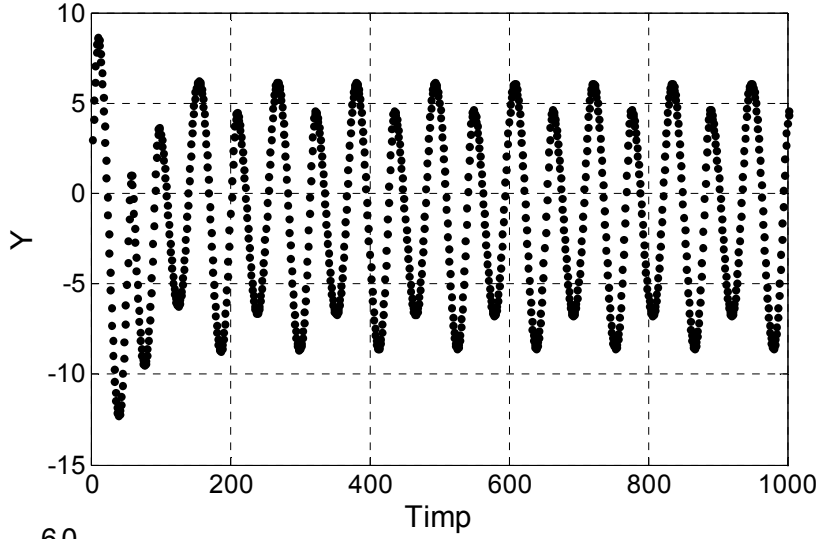


Proiectiile pe planele triedrului cartezian

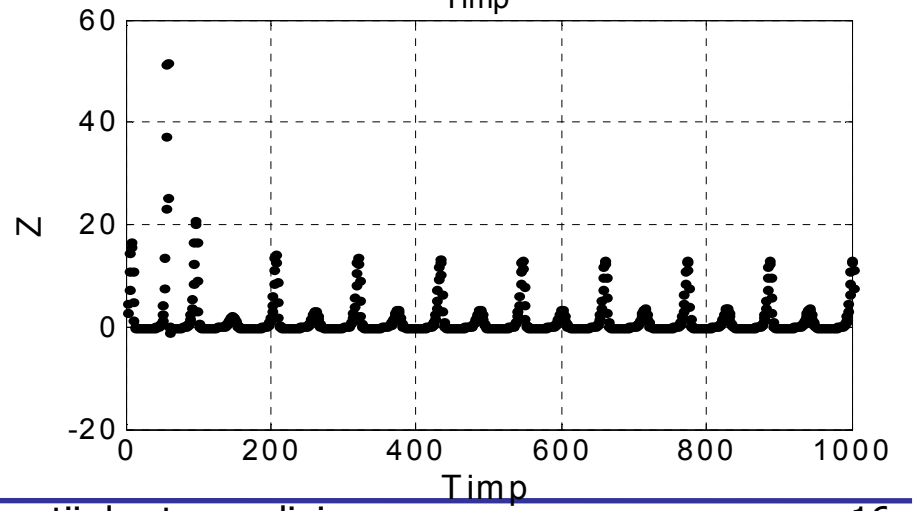


Oscilatii periodice in sistemul Rosler discret





Evolutia in timp a variabilelor de stare discrete



Determinarea ciclurilor limita discrete

- *Ciclurile limită* ***discrete*** pot fi determinate analitic, printr-un *proces iterativ*.
- Presupunand *conditia initiala* pe *ciclul limita*: $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \in (C)$
- Conditia discreta de *comportare periodica*: $\mathbf{x}[k+L] = \mathbf{x}[k]$
- Din ecuatiile de stare ale sistemului discret: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$
- Calculam: $\mathbf{x}[k+L] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k+L\text{-}1]) = \cdots = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}\circ\cdots\circ\mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$
- Folosind notatia: $\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}\circ\cdots\circ\mathbf{f}(\mathbf{x})$
- Obtinem ecuatia algebrica: $$\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$
- Similara ecuatiei de punct fix, dar aplicata funcției neliniare $\mathbf{f}_L(\mathbf{x})$, și nu funcției de tranziție a stărilor, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Metoda de calcul a ciclurilor limita discrete

- L = 1; se determina punctele fixe ale sistemului discret: $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
- L = 2;
  - Se determina ciclurile limita de lungime 2: $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
  - Din solutiile ecuatiei se elimina punctele fixe
  - Valorile ramase trebuie sa fie in numar par
- L = 3;
  - Se determina ciclurile limita de lungime 3: $\mathbf{f}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
  - Din solutiile ecuatiei se elimina punctele fixe
  - Valorile ramase trebuie sa fie in numar multiplu de 3
- L = 4;
  - Se determina ciclurile limita de lungime 4: $\mathbf{f}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
  - Din solutiile ecuatiei se elimina punctele fixe si ciclurile limita de lungime 2
  - Valorile ramase trebuie sa fie in numar multiplu de 4
- .....
- L = m;
  - Se determina ciclurile limita de lungime m: $\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
  - Din solutiile ecuatiei se elimina punctele fixe si ciclurile limita de lungime care divide m
  - Valorile ramase trebuie sa fie in numar multiplu de m
- .....
- L = L_{max}....

Atractivitatea ciclurilor limită

- Mulțimile limită de tip ciclu pot fi atractoare sau repulsoare.
- **Definiție**: Un *ciclu limită* (C), al unui sistem dinamic neliniar autonom, analogic sau discret, se numește **atractor** dacă are o vecinătate D_C, incluzând (C), astfel încât, pentru orice punct, $x_0 \in D_C$, condiție inițială a sistemului, traiectoria acestuia se apropie asimptotic de ciclul limită (C).
- În caz contrar, ciclul limită se numește **repulsor**.
- Conditia de atractivitate:

$$\lim_{t\to\infty} d\big(\mathbf{x}(t),(C)\big)=0 \qquad \lim_{k\to\infty} d\big(\mathbf{x}[k],(C)\big)=0$$

$$d\big(\mathbf{x}(t),(C)\big)=\inf_{\mathbf{y}\in(C)}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \qquad d\big(\mathbf{x}(t),(C)\big)=\min_{\mathbf{y}\in(C)}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^{\,2}}$$

Atractivitatea ciclurilor limită discrete

- Calcul de tip ***liniarizare locala***.
- un *ciclu limită discret* are un număr *finit de puncte*. $(C) = \{\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_L\} \in \Re^N$
- Pentru fiecare vector $\mathbf{x}_l \in (C)$, $l = 1, \ldots, L$
- Se consturiește *sistemul liniarizat* în jurul punctului $\mathbf{x}_l$
- Se calculeaza *matricea sa de tranziție a stărilor* : $\mathbf{A}_l = \mathbf{J}(\mathbf{x}_l)$;
- Se calculează *valorile proprii* ale acestei matrici:

$$\lambda_{n,l};\ n = 1, \ldots, N,\ l = 1, \ldots, L$$

- Se calculează ***multiplicatori caracteristici***, ca *valori medii logaritmice* ale modulelor fiecărui șir de valori proprii

$$M_n = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\log\left|\lambda_{n,l}\right| = \log\sqrt[L]{\left|\prod_{l=1}^{L}\lambda_{n,l}\right|}, \quad n = 1, \cdots, N$$

- Se deduce atractivitatea dupa **semnul** multiplicatorilor caracteristici:
  - Toti multiplicatorii caracteristici **negativi** inseamna **atractivitate**
  - Un singur multiplicator caracteristic **pozitiv** inseamna **repulsivitate**

Secțiunea Poincare

- Se ataseaza *prototipului analogic* un **sistem discret**;
- *Momentele de eșantionare* se iau atunci când traiectoria sistemului analogic intersectează un ***hiper-plan fix***;
- Momentele de eșantionare *nu mai sunt obligatoriu echidistante;*
- Sistemului analogic de *ordinul N*, i se atașează un sistem discret de *ordin N – 1*;
- Dacă sistemul analogic are o *comportare periodică*, sistemul discret, obținut prin secționarea Poincare, are un *punct fix sau un ciclu limita*, situat la intersecția între curba închisă ce descrie oscilația neliniară analogică și hiper-planul ce definește secțiunea Poincare.
- **Teoremă**:
- *Ciclul limită* analogic este **atractor** dacă și numai dacă *punctul fix sau ciclul limita discret,* obținut prin secționarea Poincare, este **stabil**.
- În caz contrar, cele două mulțimi limită sunt ***simultan repulsoare***.

Exemple: sistem Van der Pol

- In general, pentru un sistem de ordin N, hiper-planul este dat de ecuatia:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \cdot x_n = c$$

- Pentru un sistem de ordin 2, oscilator Van der Pol:

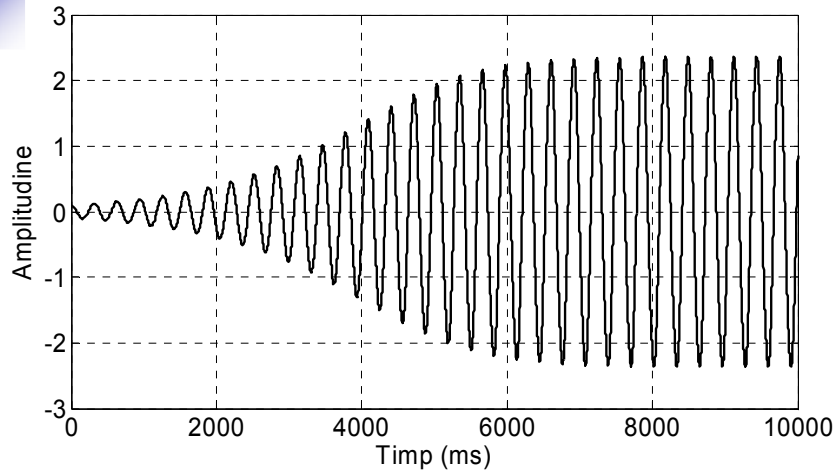
$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot \left(1 - x_2^{\,2}\right) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases}$$

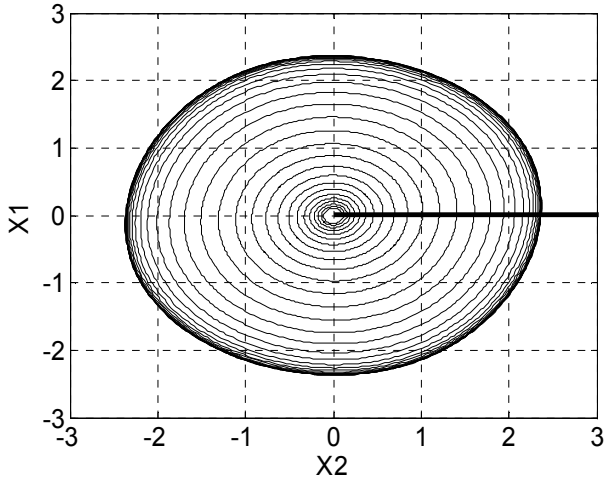
- Ecuatia dreptei de sectionare Poincare este:

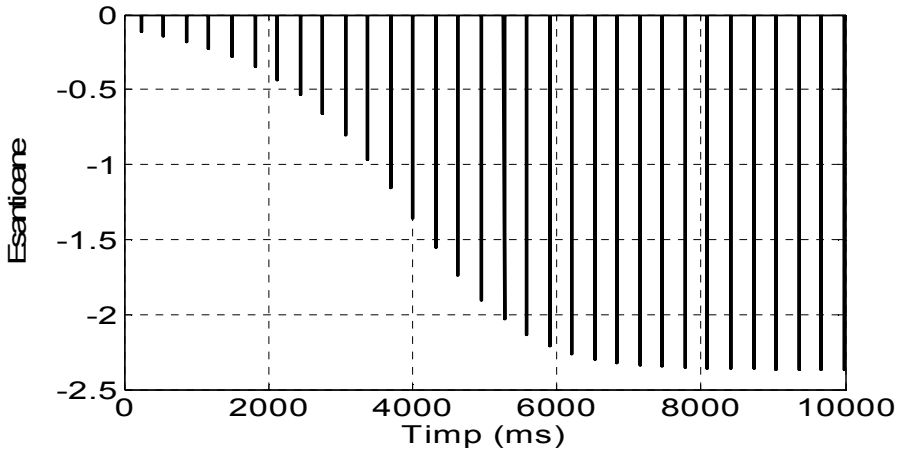
$$b \cdot x_1 + c \cdot x_2 = k$$

- Simplificand relatia (c = k = 0, b = 1), obtinem: $x_1 = 0$
- Rezultand simularile urmatoare.

Sistem Van der Pol

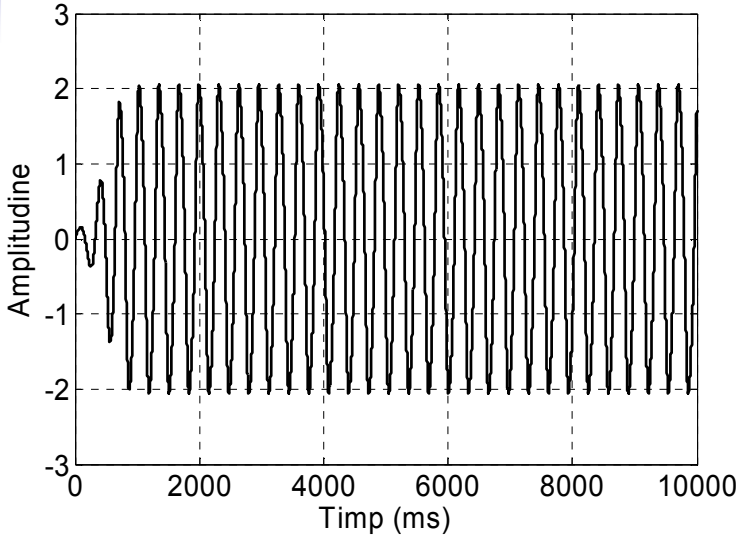


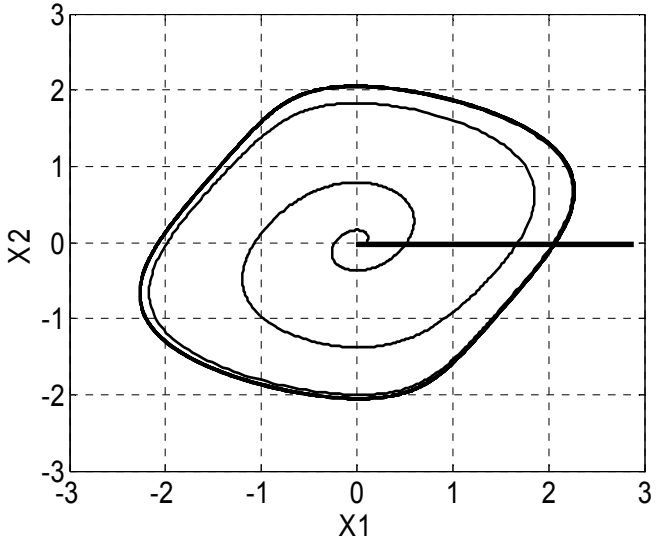


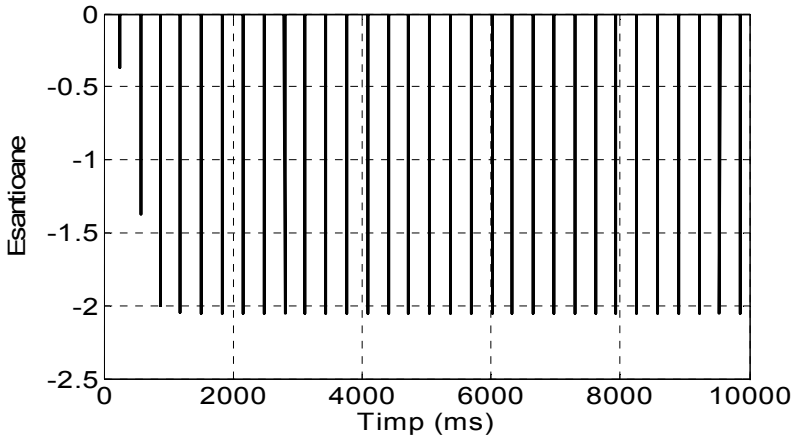


Sistem Van der Pol cu
a = 0,1
$\omega_0 = 1$

Sistem Van der Pol

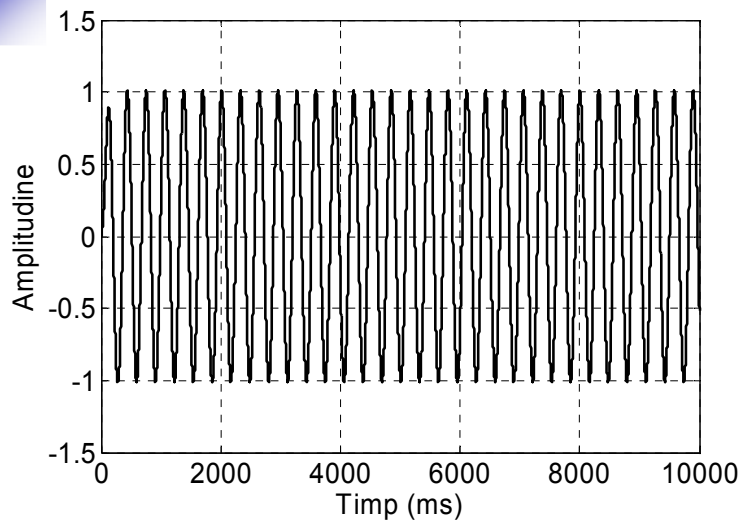


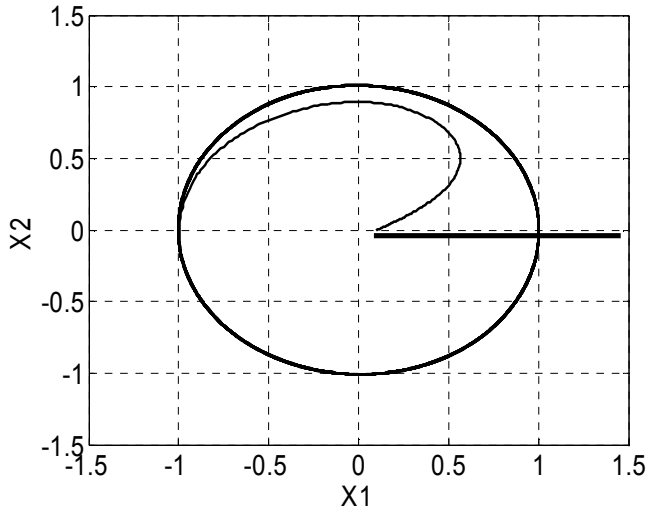


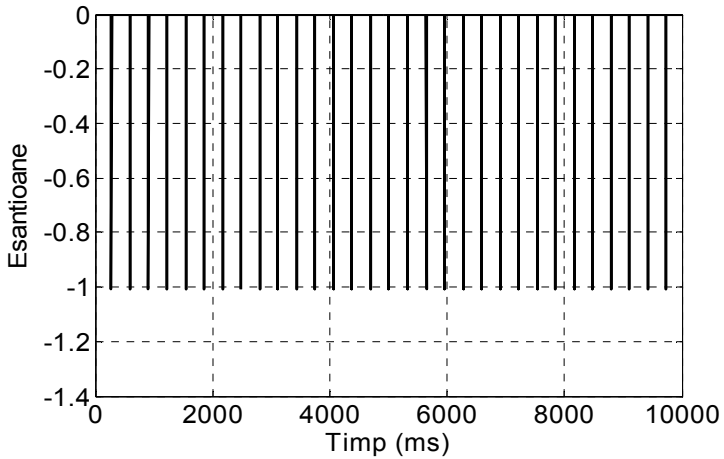


Sistem Van der Pol cu
a = 1
$\omega_0 = 1$

Oscilator cuasiarmonic





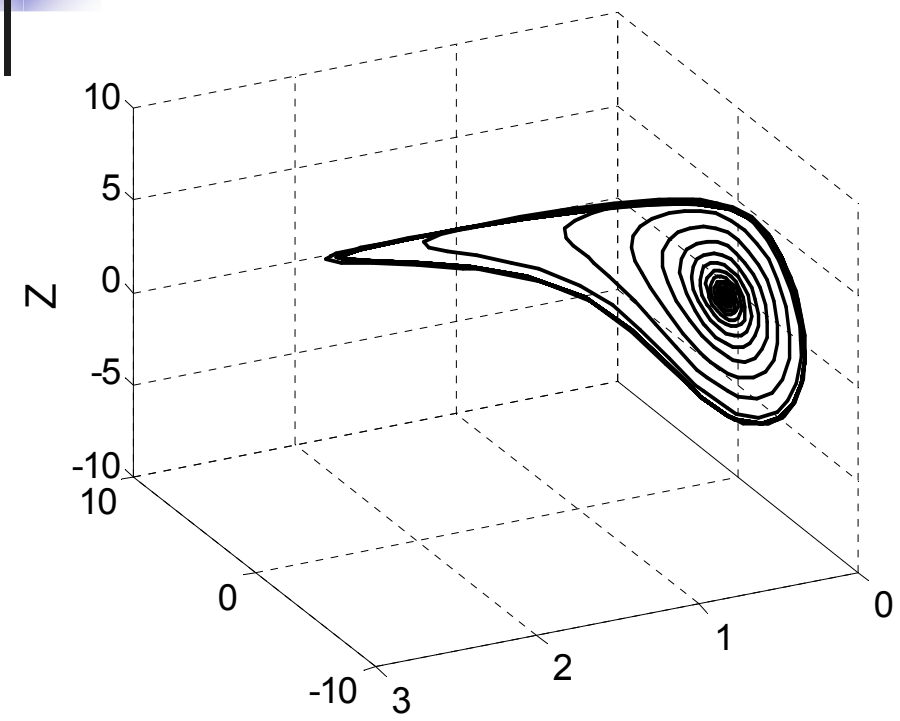


Oscilator cuasiarmonic cu
a = 4
ω_0 = 1

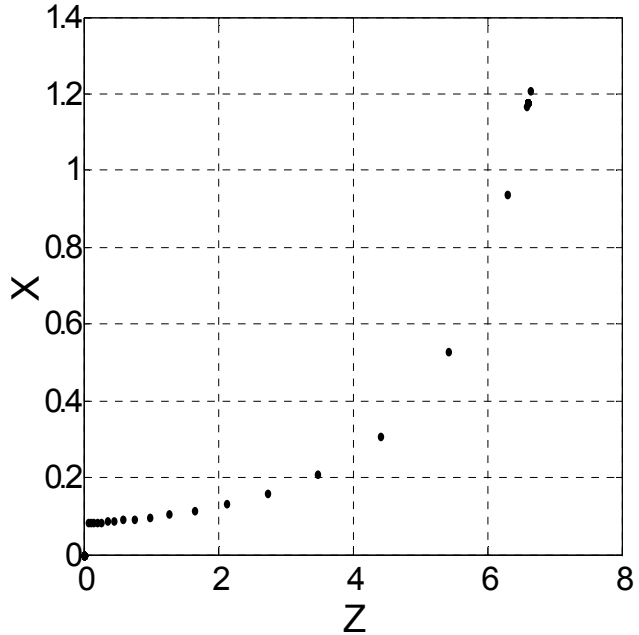
$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases}$$

Sistem Rosler

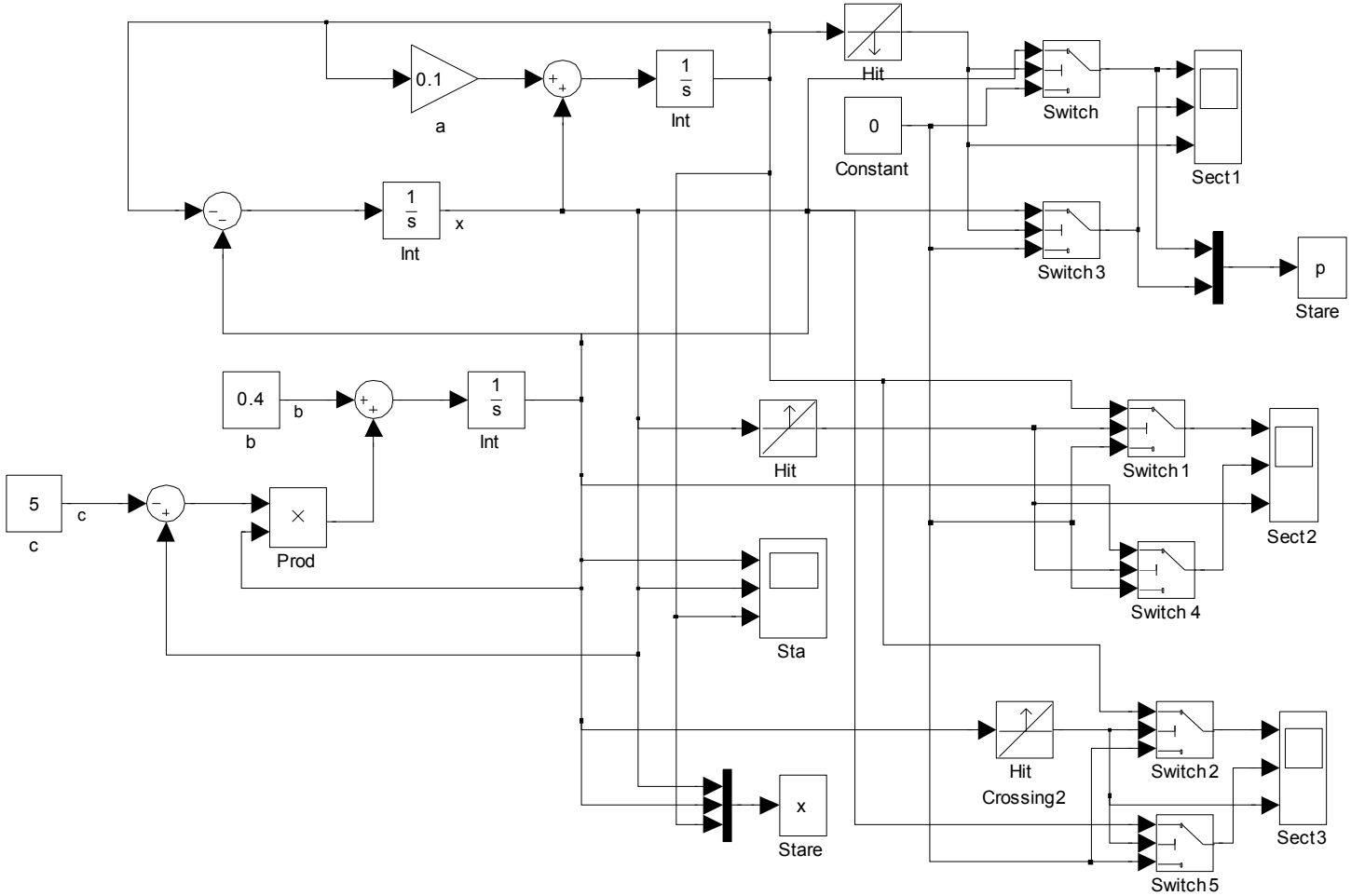
$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x - ay \\ z' = b + xz - cz \end{cases}$$



$$y = 0$$



Sistem Rosler model de simulare - sectiune



Bibliografie

- Suport de curs: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Curs\
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- Suport de laborator: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Laborator
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- *I. Ciocoiu, V. Grigoras; "Tehnici moderne de procesare a semnalelor"*

Ed. Cermi 2005 (cap. 4 si 5):

- \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Tehnici moderne de procesare a semnalelor
- *T. S. Parker, L. O. Chua; "Chaotic Dynamics Algorithms" 1989:*
  - \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Chaotic Dynamics Algorithms - Parker & Chua
- *H. G. Schuster; "Deterministic Chaos" 1984*
- *J. Guckenheimer, P. Holmes; "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields" Springer-Verlag 1983*