Technical University
of Iasi, Romania

Faculty of Electronics and
Telecommunications

Signals, Circuits and
Systems laboratory

Circuite neliniare pentru prelucrarea semnalelor

Dinamica neliniara de tip constant

Cuprins

- Dinamica neliniara de tip constant
  - Ierarhizarea complexității dinamice
  - Dinamica de tip constant
  - Puncte de echilibru
  - Puncte fixe
  - Atractivitate si repulsivitate
  - Metode de studiu a stabilitatii

Ierarhizarea complexității dinamice

- Exista patru tipuri de comportamente dinamice:
  - comportamentul de tip constant,
  - comportamentul de tip periodic,
  - comportamentul de tip cuasiperiodic,
  - comportamentul de tip haotic.
- Complexitatea comportamentelor este ordonata crescator
- Ca domenii de aplicare ordinea este descrescatoare:
  - dinamica de tip constant - amplificatoare, filtre, sisteme de control
  - dinamica periodica - oscilatoare, invertoare, surse in comutatie
  - dinamica de tip cuasiperiodic - fenomene de modulatie
  - dinamica haotica - generatoare de zgomot, sisteme de criptare.
- Studiul comportarii dinamice se face pe cazul sistemului autonom

Dinamica de tip constant

Definitie: pentru un sistem autonom, există cel puțin o valoare a vectorului de stare care, odată atinsă, rămane nemodificată.

Pentru un sistem **analogic**:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f\left(\mathbf{x}(t)\right) \\ y(t) = g\left(\mathbf{x}(t)\right) \end{cases}$$

$$\exists \mathbf{x}^* \in \Re^N : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*, \forall t > 0$$

Pentru un sistem **discret**:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f\left(\mathbf{x}[k]\right) \\ y[k] = g\left(\mathbf{x}[k]\right) \end{cases}$$

$$\exists \mathbf{x}^* \in \Re^N : \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*, \forall k > 0$$

Puncte de echilibru

- Pentru un sistem analogic autonom: $$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f\left(\mathbf{x}(t)\right) \\ y(t) = g\left(\mathbf{x}(t)\right) \end{cases}$$
- Conditia de comportare constanta: $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$$
- Prin derivare: $$\mathbf{x}'(t) = 0 \quad \forall t > 0$$
- Conduce la ecuatia algebrica: $$f\left(\mathbf{x}(t)\right) = 0$$
- A carei solutie poarta numele de punct de echilibru.

Cazul liniar

Pentru un sistem autonom **liniar**: $\mathbf{x}'(\mathrm{t}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)$

Conditia de punct de echilibru: $\mathbf{x}'(t) = 0 \quad \forall t > 0$

Conduce la ecuatia liniara: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 0$

Avand solutie unica: $\mathbf{x}^* = 0$

Exemple

Spre deosebire de cazul liniar, ecuația neliniară, poate avea o soluție, în general nenulă, mai multe soluții, sau nici una, în funcție de forma particulară a funcției neliniare de tranziție a stărilor.

Exemple pentru sisteme uni-dimensionale: N = 1

$$x' = x^2 + 1 \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x' = x + 1 \quad x + 1 = 0 \quad x^* = -1$$

$$x' = x^2 - 1 \quad x^2 - 1 = 0 \quad x^*_{1,2} = \pm 1$$

$$x' = \sin(x) - \sqrt{2}/2 \quad \sin(x) = \sqrt{2}/2 \quad x^*_m = (-1)^m \, \pi/4 + m \cdot \pi_{m \in Z}$$

Puncte fixe

- Pentru un sistem discret autonom:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k]) \end{cases}$$

- Conditia de comportare constanta:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] \quad \forall k \in Z$$

- Conduce la ecuatia :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}[k]$$

- Care devine algebrica datorita prezentei aceleiasi valori a timpului discret:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

- Ecuatia se numeste “problema de punct fix” iar solutia sa poarta numele de “punct fix”.

Cazul liniar

Pentru un sistem autonom **liniar**: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k]$

Conditia de punct fix: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}[k]$

Conduce la ecuatia liniara: $\left(\mathbf{A} - \mathbf{I}_{\mathbf{N}}\right) \cdot \mathbf{x}[k] = 0$

Avand solutie unica: $\mathbf{x}^* = 0$

Exemple

- Spre deosebire de cazul liniar, ecuația neliniară, poate avea o soluție, în general nenulă, mai multe soluții, sau nici una, în funcție de forma particulară a funcției neliniare de tranziție a stărilor.
- Exemple pentru sisteme uni-dimensionale: N = 1

$$x[k+1] = x^2[k] + x[k] + 1 \quad x^2[k] + x[k] + 1 = x[k]$$

$$x[k+1] = 3x[k] - 2 \quad 3x[k] - 2 = x[k] \quad x^* = 1$$

$$x[k+1] = x^2[k] - 2x[k] + 2 \quad x^2[k] - 2x[k] + 2 = x[k] \quad x^*_{1,2} = 1;2$$

$$x[k+1] = x[k] + \cos(x[k]) + \tfrac{1}{2} \quad x[k] + \cos(x[k]) + \tfrac{1}{2} = x[k] \quad x^*_m = \pm \tfrac{5\pi}{6} + 2m \cdot \pi_{m \in Z}$$

Atractivitate si repulsivitate

- Punctele de echilibru ale sistemelor analogice si
- Punctele fixe ale sistemelor discrete
- pot fi:
  - stabile (**atractoare**) sau
  - instabile (**repulsoare**).
- La sistemele neliniare se pot pune in evidenta **mai multe variante de stabilitate**
- spre deosebire de unicul tip de stabilitate: MI – ME, pentru sistemele liniare.
- Sistemele neliniare, putand avea **mai multe puncte** de echilibru sau fixe, nu se poate vorbi de **stabilitatea sistemului**, ci doar a unuia sau a altuia dintre punctele puse in discutie

Atractivitatea punctelor de echilibru

- Stabilitate neutra (simpla): $\forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in V(\mathbf{x}^*) \quad \forall t \geq 0$

- Stabilitate asimptotica: $\forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$

- Stabilitate exponential asimptotica:

$$\exists a, A \geq 0, \forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*)\ \forall t \geq 0 \quad \left\| \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^* \right\| \leq A \cdot e^{-at}$$

Atractivitatea punctelor fixe

- Stabilitate neutra (simpla): $\forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}[k] \in V(\mathbf{x}^*) \quad \forall k \geq 0$

- Stabilitate asimptotica: $\forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*$

- Stabilitate exponential asimptotica:

$$\exists a, A \geq 0, \forall \mathbf{x_0} = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \; \forall k \geq 0 \quad \left\| \mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^* \right\| \leq A \cdot e^{-ak}$$

Metode de studiu a stabilitatii

- Aplicarea directa a uneia dintre **definitii**
  - Dificila
  - Imposibil de automatizat
  - **Generala**
- Metoda **liniarizarii locale**
  - **Simpla**
  - Rezolvabila prin **calcul algebric** (automatizabila prin **calcul simbolic**)
  - Valabila numai intr-o **vecinatate** mica in jurul punctului studiat
- Metoda **Liapunov**
  - Complexitate medie
  - Metoda constructiva (greu si numai **partial** automatizabila)
  - Generalitate medie
  - **Intrepretare grafica** intuitiva
  - Permite deducerea unor **metode de proiectare** a sistemelor neliniare global asimptotic **stabile** (de ex. sistemele de tip **gradient**).

Bibliografie

- Suport de curs: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Curs\
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- Suport de laborator: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Laborator
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- *I. Ciocoiu, V. Grigoras; "Tehnici moderne de procesare a semnalelor"*

Ed. Cermi 2005 (cap. 4 si 5):

\Lab_Files\6TMPS_CNPS\Tehnici moderne de procesare a semnalelor

- *T. S. Parker, L. O. Chua; "Chaotic Dynamics Algorithms" 1989:*

  \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Chaotic Dynamics Algorithms - Parker & Chua
- *H. G. Schuster; "Deterministic Chaos" 1984*
- *J. Guckenheimer, P. Holmes; "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields" Springer-Verlag 1983*