Technical University
of Iasi, Romania

Faculty of Electronics and
Telecommunications

Signals, Circuits and
Systems laboratory

Circuite neliniare pentru prelucrarea semnalelor

Studiul stabilitatii prin metoda Liapunov

Cuprins

- Studiul stabilitatii prin metoda Liapunov
  - **Definirea** functiei Liapunov
  - Prima **teorema Liapunov**
  - Aproximarea prin **liniarizare locala**
  - Interpretari geometrice
  - Sisteme de tip **gradient**
  - Aplicatii la proiectarea **algoritmilor de invatare**

Definitia functiei Liapunov (analogic)

Definiție

Sistemului analogic, neliniar, autonom: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$

având un **punct de echilibru** în vectorul **x***, i se atașează **funcționala**:

$$V: \Re^N \to \Re$$

Dacă aceasta respectă condițiile:

1. $V(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}^*} \subseteq \Re^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* : \mathrm{V}(\mathbf{x}) > 0$
3. $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) < 0: \quad \forall t > 0$

atunci *funcționala se numește* **funcție Liapunov** *atașata sistemului inițial*.

Definitia functiei Liapunov (discret)

Definiție

Sistemului discret, neliniar, autonom: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$

având un **punct fix** în vectorul constant **x***, i se atașează **funcționala**:

$$V: \Re^N \to \Re$$

Dacă aceasta respectă condițiile:

1. $V(\mathbf{x}^*) = 0$
2. $\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}^*} \subseteq \Re^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* : \mathrm{V}(\mathbf{x}) > 0$
3. $V(\mathbf{x}[k+1]) < V(\mathbf{x}[k]): \quad \forall k \in N$

atunci *funcționala se numește* **funcție Liapunov** *atașata sistemului inițial*.

Teorema Liapunov

Teoremă:

- Dacă unui *punct fix* sau de *echilibru* al unui sistem neliniar,
- *discret* sau *analogic*,
- i se poate atașa o **funcție Liapunov**,
- atunci punctul corespunzător are **caracter atractor**.

Interpretare:

- Daca funcționala V(**x**) este funcție Liapunov,
- ea defineste o hipersuprafața în spațiul $\Re^{N+1}$
- hipersuprafața asemănătoare unui hiper-paraboloid,
- interpretabil, cel puțin local, ca o **mărime de tip energetic**.

Interpretare geometrica a teoremei Liapunov

Aproximare prin liniarizare locala (analogic)

- Într-o *vecinătate suficient* de restrânsă, *sistemul neliniar* autonom studiat poate fi *aproximat* prin **sistemul liniar**: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$
- definim *funcționala patratică*: $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$

1. Evident: $V(\mathbf{0}) = 0$
2. Daca sistemul analogic liniarizat este *stabil*, **A** are valori proprii cu partea reala *strict negativa*. Functionala: $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$

rezulta *negativ definita*, deci V(x) este **pozitiv definita**, confirmand:

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* :$$

3. $$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{x} \\ &\mathbf{M} = -\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \qquad \mu_n = -\lambda_n\cdot\lambda_n^* = -\left(\mathrm{Re}(\lambda_n)\right)^2 - \left(\mathrm{Im}(\lambda_n)\right)^2 < 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

Functionala patratica definita de matricea **M** este **negativ definita.**

Aproximare prin liniarizare locala (discret)

- Într-o *vecinătate suficient* de restrânsă, *sistemul neliniar* autonom studiat poate fi *aproximat* prin **sistemul liniar**: $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}[k]$
- definim *funcționala patratică*: $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{A}-\mathbf{I}_N\right)\cdot\mathbf{x}$

1. Evident: $V(\mathbf{0}) = 0$
2. Daca sistemul discret liniarizat este *stabil*, **A** are valori proprii cu modulul *strict subunitar*. Functionala: $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{A}-\mathbf{I}_N\right)\cdot\mathbf{x}$

rezulta *negativ definita*, deci V(x) este **pozitiv definita**, confirmand:

$$\mathrm{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* :$$

3. *Forma patratica* definita de matricea **A** - $\mathbf{I}_N$ are valori proprii **strict subunitare.**

$$V(\mathbf{x}[k+1]) < V(\mathbf{x}[k]): \quad \forall k \in N$$

Interpretare geometrica a aproximarii liniare

- într-o vecinătate suficient de restrânsă a punctului de echilibru, paraboloidul definit de **forma patratică** V(**x**), *aproximează funcția Liapunov* a sistemului neliniar autonom,
- în același mod în care, într-o vecinătate similară, *funcția neliniară* de tranziție a stărilor este aproximabilă printr-una **liniară**

Sisteme de tip gradient

- într-un *spațiu vectorial* finit dimensional, avem de rezolvat o **problemă de optimizare**, fără constângeri: minimizarea *functiei de cost* V(**x**):

$$\min V(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \Re^N$$

- *Functia de cost* V(**x**) este o funcțională **concavă**, având un minim absolut în punctul de optim căutat, **x***.
- putem privi această funcțională ca pe *funcția Liapunov* a unui sistem neliniar autonom, având un **punct de echilibru** în **x***.
- punctul de echilibru fiind stabil, cf. primei *teoreme a lui Liapunov*, **sistemul neliniar** proiectat, va evolua în timp spre *punctul de optim* **x***.
- interpretam *gradientul functionalei* Liapunov, $\partial V / \partial \mathbf{x}$, ca direcție de **crestere** a *funcției de cost* .
- direcția de evoluție a traiectoriei sistemului trebuie luată în sens opus:

Sisteme de tip gradient analogice

- Sistem de tip gradient (evoluand in sensul scaderii gradientului):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mu \cdot \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathbf{x}}$$

- Constanta μ, din sistemul ecuațiilor de stare, permite modificarea vitezei de evoluție a sistemului in directia dorita.
- Analizand stabilitatea prin metoda Liapunov:

$$\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{dt} = -\mu \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = -\mu \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^2 < 0 \quad \forall \mu > 0$$

- Primele doua conditii din teorema Liapunov fiind indeplinite din conditiile problemei de optimizare.

Sisteme de tip gradient discrete

- Sistem de tip gradient (evoluand in sensul scaderii gradientului):

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] - \mu \cdot \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathbf{x}}$$

- Constanta μ, din sistemul ecuațiilor de stare, permite modificarea vitezei de evoluție a sistemului in directia dorita.
- Analizand stabilitatea prin metoda Liapunov:

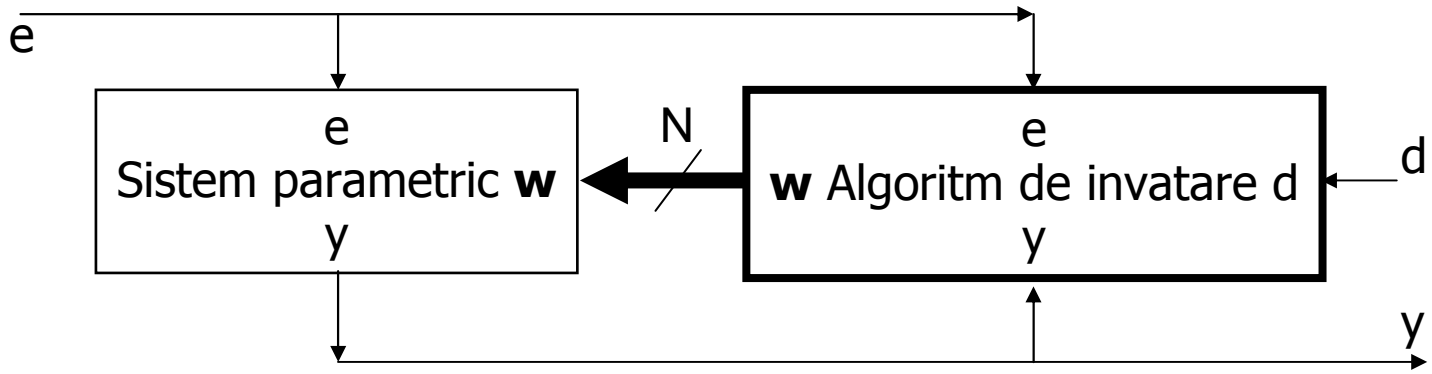
$$V(\mathbf{x}[k+1]) - V(\mathbf{x}[k]) \approx \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{x}[k+1] - \mathbf{x}[k]) =$$

$$= -\mu \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = -\mu \cdot \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^2 < 0 \quad \forall \mu > 0$$

- Primele doua conditii din teorema Liapunov fiind indeplinite din conditiile problemei de optimizare.

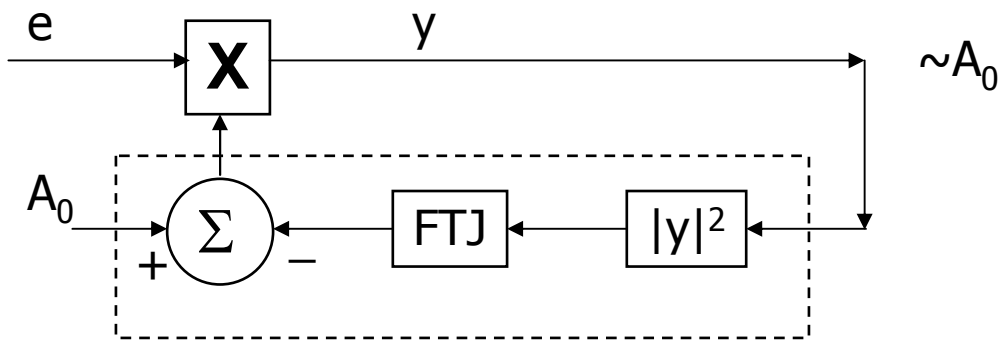
Aplicatii la proiectarea algoritmilor de invatare

- **Algoritmii de invatare** sunt sisteme neliniare, multidimensionale, utilizate la *adaptarea parametrilor* altor sisteme, liniare sau neliniare, cu parametri variabili in timp (*parametrice*).
- *Dimensiunea vectorului de stare* a sistemului de adaptare (algoritmului de invatare) este egala cu *numarul parametrilor sistemului* supus adaptarii (invatarii) - N.
- Sistemul rezultat din interconectarea *sistemului supus invatarii* si a *sistemului de adaptare* se numeste **sistem adaptiv**.



Exemple de sisteme adaptive

- Filtre adaptive
- Retele neurale
- Egalizoare pentru canale de comunicatii
- Sisteme de control automat
- Sisteme de identificare a parametrilor unui sistem necunoscut
- Sistemele de reducere a zgomotului
- Sistem de reglaj automat al amplificarii (RAA, AGC):



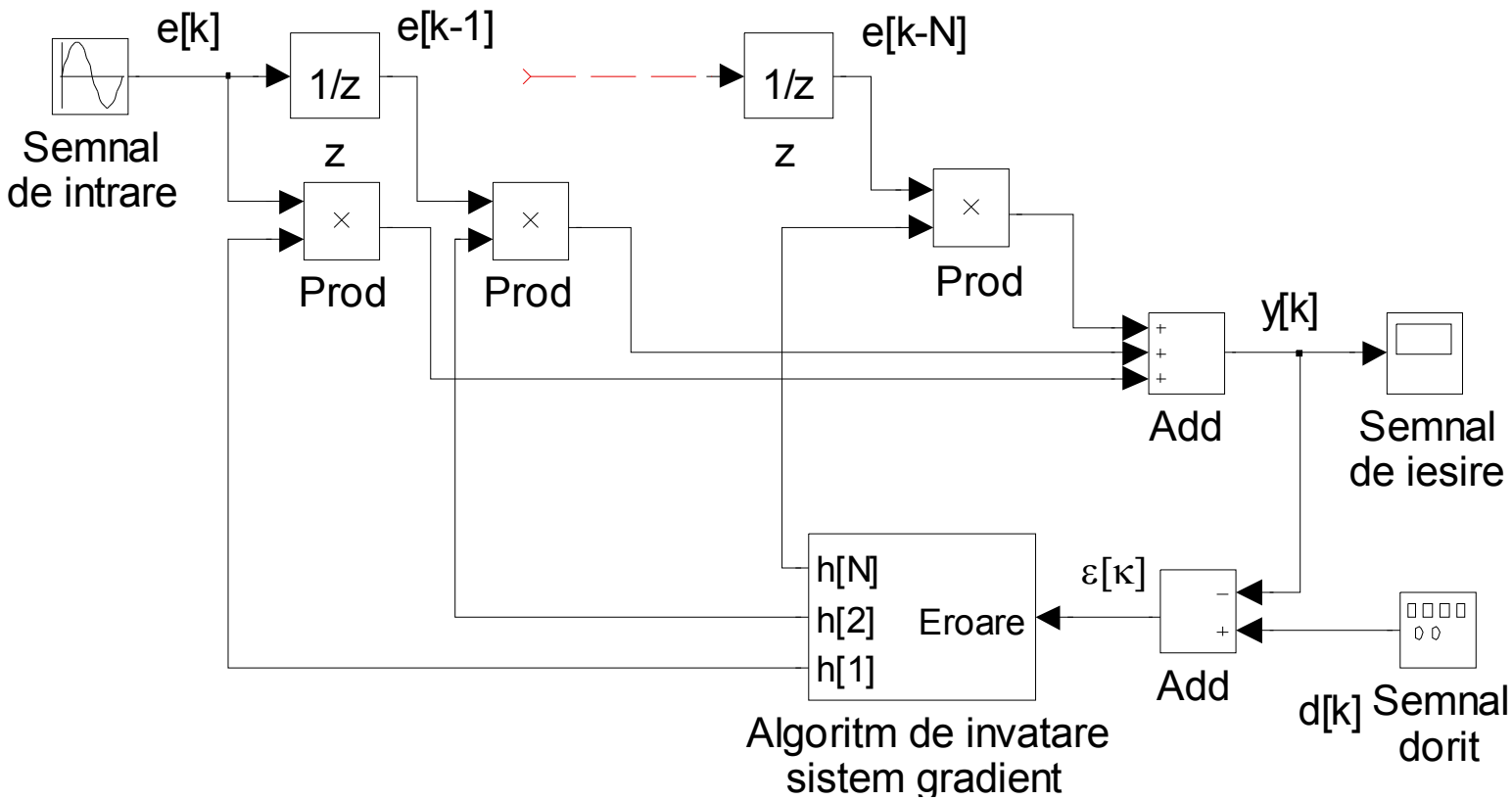
Filtre digitale FIR adaptive

- Filtrele digitale FIR sunt descrise de functia de transfer de forma:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} h[k] \cdot z^{-k}$$

- Unde coeficientii h[k] sunt esantioanele raspunsului la impuls.
- Filtrele FIR sunt:
  - Neconditionat stabile
  - Mai putin selective decat filtrele IIR
- Neconditionata stabilitate a filtrelor FIR permite adaptarea lor usoara, deoarece modificarea coeficientilor functiei de transfer nu poate duce la intabilitate

Filtre digitale FIR adaptive



Functionale pentru optimizare

- Pentru proiectarea sistemului gradient pentru invatare, formulam tema de proiectare ca o problema de optimizare
- Eroarea instantanee: $$\varepsilon[k] = d[k] - y[k]$$
- Unde iesirea este data de convolutia discreta:

$$y[k] = h[k] * e[k] = \sum_{n=0}^{N} h[n,k] \cdot e[k-n] = \bar{\mathbf{h}}[k] \cdot \bar{\mathbf{e}}[k]$$

$$\bar{\mathbf{h}}[k] = \left[h[0,k] \ldots h[N,k]\right]^T \quad \bar{\mathbf{e}}[k] = \left[e[k-1] \ldots e[k-N]\right]^T$$

- Posibile functionale de eroare:
  - Eroarea patratica instantanee: $E[k] = \varepsilon^2[k]$
  - Eroarea medie patratica: $E[k] = \frac{1}{L+1} \sum_{l=0}^{L} \varepsilon^2[k-l]$
  - Eroarea patratica ponderata: $E[k] = \sum_{l=0}^{L} \rho^l \cdot \varepsilon^2[k-l] \quad \rho \in (0, \ldots, 1)$

Algoritmi de adaptare a filtrelor FIR

- Sistemul gradient care implementeaza algoritmul de adaptare:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] - \mu \cdot \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{h}}$$

- Detaliem derivata partiala a functiei de eroare:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{h}}[k] = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \varepsilon}[k] \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}[k] \cdot \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathbf{h}}[k] = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \varepsilon}[k] \cdot \bar{\mathbf{e}}[k]$$

- Unde derivata in raport cu eroarea instantanee depinde de alegerea functionalei pentru optimizare

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \varepsilon}[k] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \begin{cases} \varepsilon^2[k] \quad sau \\ \dfrac{1}{L+1} \displaystyle\sum_{l=0}^{L} \varepsilon^2[k-l] \quad sau \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{L} \rho^l \cdot \varepsilon^2[k-l] \end{cases}$$

Algoritmul ‘Least Mean Square’ (LMS)

- Pentru alegerea functionalei de optimizare sub forma erorii patratice instantanee:

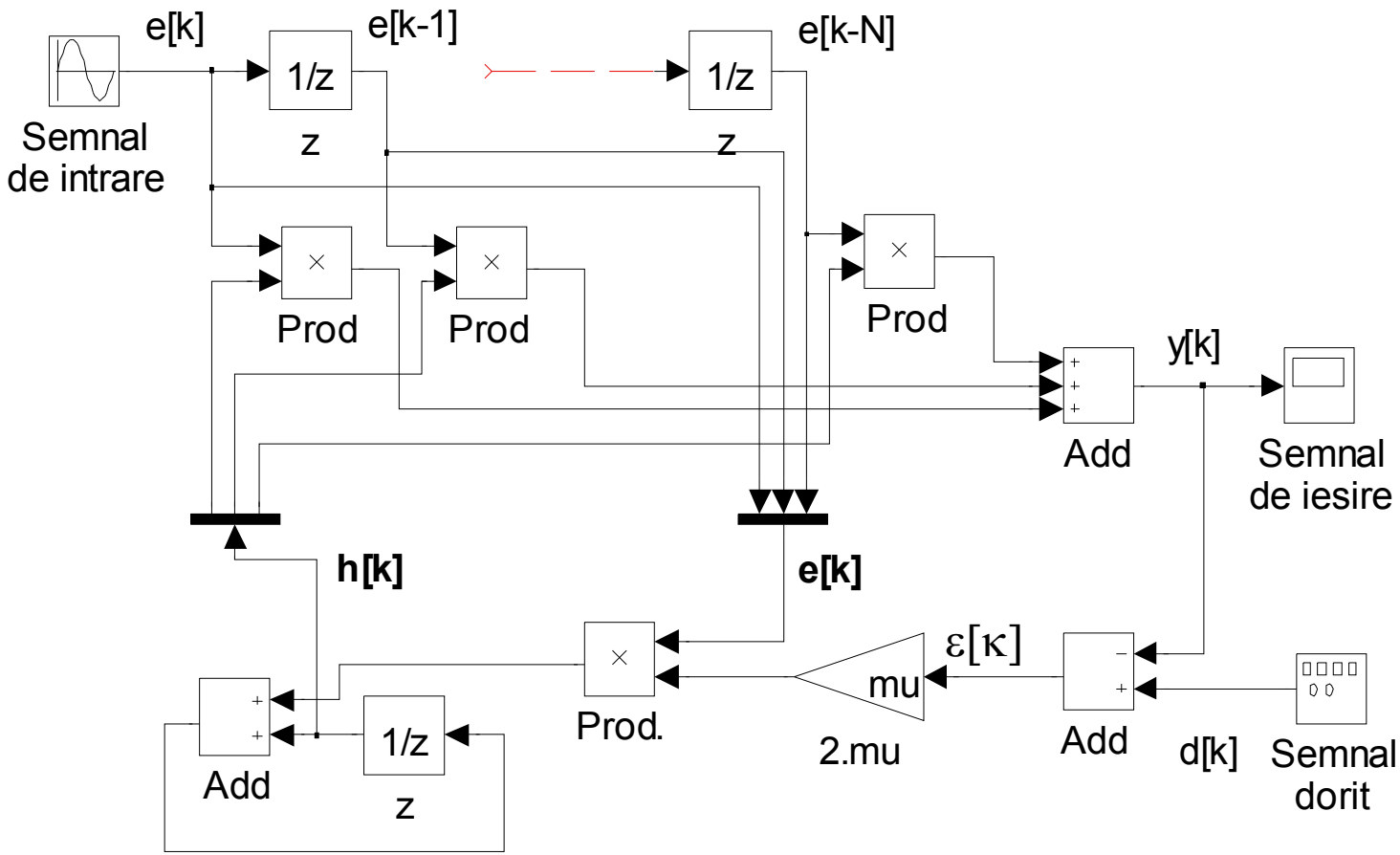
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \varepsilon}[k] &= 2\cdot\varepsilon[k]\\ \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{h}}[k] &= -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \varepsilon}[k]\cdot\bar{\mathbf{e}}[k]\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{h}}[k] = -2\varepsilon[k]\cdot\bar{\mathbf{e}}[k]$$

- Sistemul gradient rezulta:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] - \mu\cdot\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathbf{h}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu\cdot\varepsilon[k]\cdot\bar{\mathbf{e}}[k]$$

- Reprezentand algoritmul de adaptare pe baza celor mai mici patrate (Least Mean Square) LMS

Schema bloc a filtrului FIR cu algoritm LMS



Bibliografie

- Suport de curs: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Curs\
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- Suport de laborator: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Laborator
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- *I. Ciocoiu, V. Grigoras; "Tehnici moderne de procesare a semnalelor"*

Ed. Cermi 2005 (cap. 4 si 5):

- \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Tehnici moderne de procesare a semnalelor
- *T. S. Parker, L. O. Chua; "Chaotic Dynamics Algorithms" 1989:*
  - \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Chaotic Dynamics Algorithms - Parker & Chua
- *H. G. Schuster; "Deterministic Chaos" 1984*
- *J. Guckenheimer, P. Holmes; "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields" Springer-Verlag 1983*