Technical University
of Iasi, Romania

Faculty of Electronics and
Telecommunications

Signals, Circuits and
Systems laboratory

Circuite neliniare pentru prelucrarea semnalelor

Scrierea si simularea ecuatiilor de stare

Cuprins

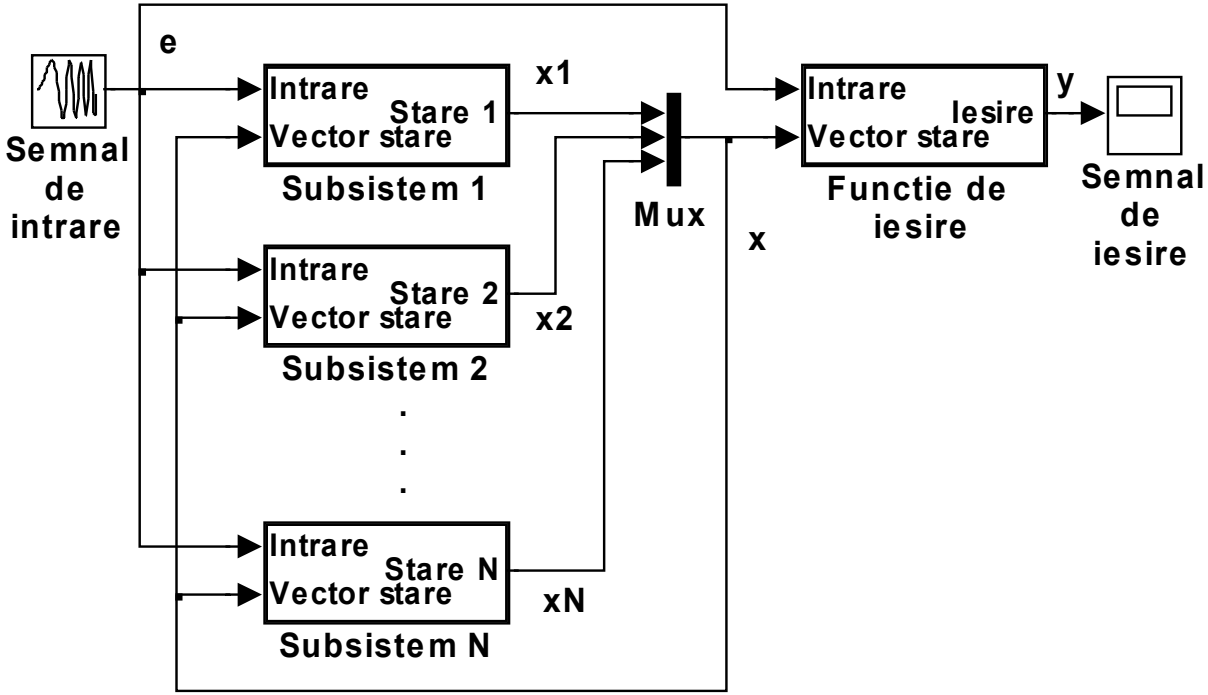
- Scrierea ecuatiilor de stare
  - Scrierea ecuatiilor de stare pentru circuite analogice
  - Scrierea ecuatiilor de stare pentru circuite discrete
- Simularea ecuatiilor de stare
  - Simularea sistemelor discrete descrise prin ecuatii de stare
  - Legatura intre sistemele analogice si discrete
  - Simularea sistemelor analogice descrise prin ec. de stare
- Metode de abordare calitativa pentru evidentierea proprietatilor sistemelor neliniare
  - Sisteme autonome si ne-autonome
  - Inversarea sensului axei timpului

Scrierea ecuatiilor de stare

- Scrierea ecuatiilor reflecta **structura sistemului**:
  - Sub-sistemele -> **ecuatiile constitutive**
  - Modul de interconectare a acestora -> **ecuatiile de legatura**
- Prin calcul **algebric**, se combina ecuatiile in scopul aducerii la forma standard a ecuatiilor de stare
- Scrierea in functie de tipul ecuatiilor:
  - ecuatiile constitutive: - elemente **fara** memorie -> ec. **algebrice**
    - elemente **cu memorie** -> ec. **dinamice**
  - ecuatiile de legatura: - ecuatii algebrice
- Scrierea ecuatiilor in functie de tipul sistemelor:
  - ecuatiile algebrice sunt similare la sisteme analogice si discrete;
  - ecuatiile dinamice se scriu distinct in functie de tipurile de sisteme: analogice sau discrete.

Scrierea ecuatiilor de stare

- Structura interna a unui sistem, privit prin prisma ecuatiilor de stare



Scrierea ecuatiilor de stare discrete

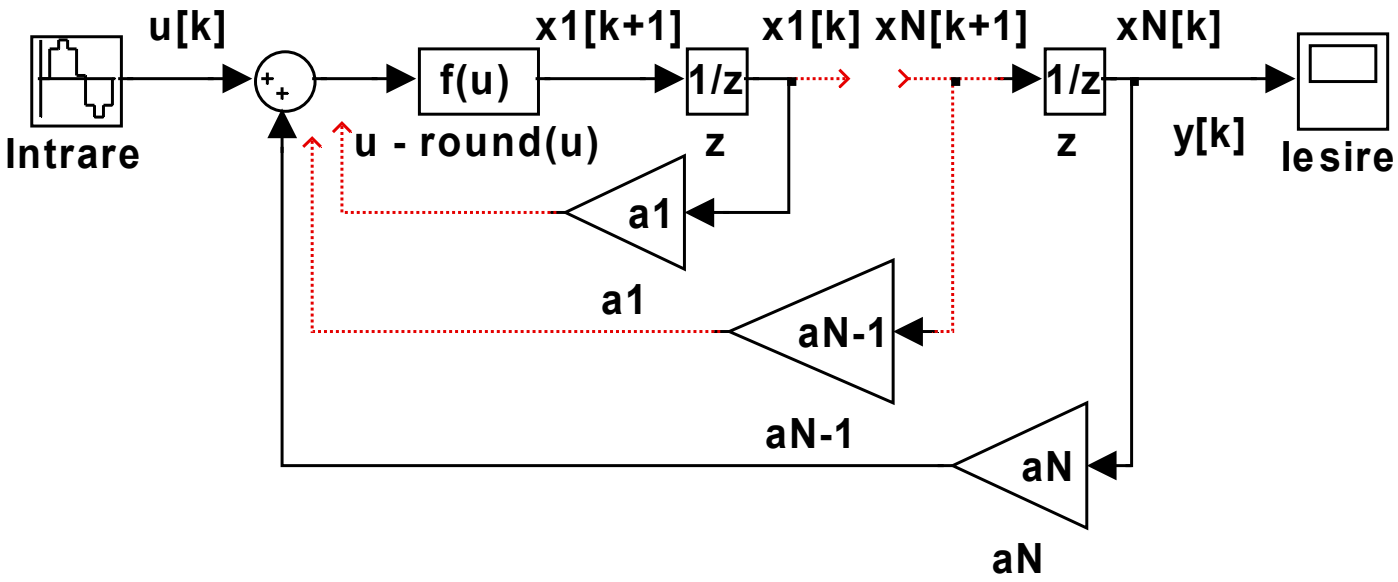
- Ecuatiile constitutive:
  - Element cu memorie: $Y(z) = z^{-1}E(z) \quad \Leftrightarrow \quad y[k] = e[k-1]$
  - Elemente algebrice: $y = e_1 + e_2 \quad y = a \cdot e \quad y = f(e)$

- Ecuatiile de legatura:
  - Se identifica blocurile de intarziere (memorare): $N = n_{z^{-1}}$
  - Variabilele de stare sunt iesirile elementelor de memorare
  - Se identifica semnalele reprezentand interconexiunile

- Calculul algebric se conduce in forma:
  - Se porneste de la ecuatiile constitutive dinamice (pe elementele de memorare)
  - Se inlocuiesc variabilele suplimentare pana raman numai var. de stare

Exemplu

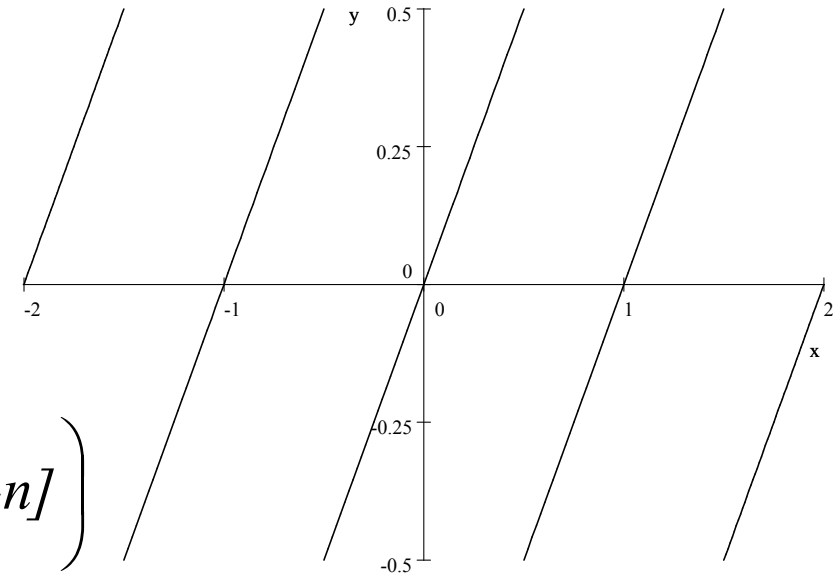
- Filtru discret, recursiv, cu depășire în virgulă fixă, de ordinul *N* :



Filtru discret, cu depășire în virgulă fixă

- Caracterizarea intrare-iesire:
  - Modelul liniar: $$y[k] = u[k] + \sum_{n=1}^{N} a[n] \cdot y[k\text{-}n]$$
  - Functia neliniara:

$$r(u) = u - round(u)$$



  - Ecuatia cu diferente:

$$y[k] = r\left(u[k] + \sum_{n=1}^{N} a[n] \cdot y[k\text{-}n] \right)$$

Ecuatii de stare

- Ecuatii constitutive: $x_n[k+1] = e_n[k]; \quad n = 1, \cdots, N$

$$y_n[k] = a_n \cdot e_n[k]; \quad y[k] = \sum_{n=1}^{N} y_n[k]$$

- Ecuatii de stare:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = r\left(u[k] + \sum_{n=1}^{N} a[n] \cdot x_n[k]\right) \\ x_2[k+1] = x_1[k] \\ \vdots \\ x_N[k+1] = x_{N-1}[k] \end{cases}$$

- Ecuatia de iesire: $y[k] = x_N[k]$

Scrierea ecuatiilor de stare analogice

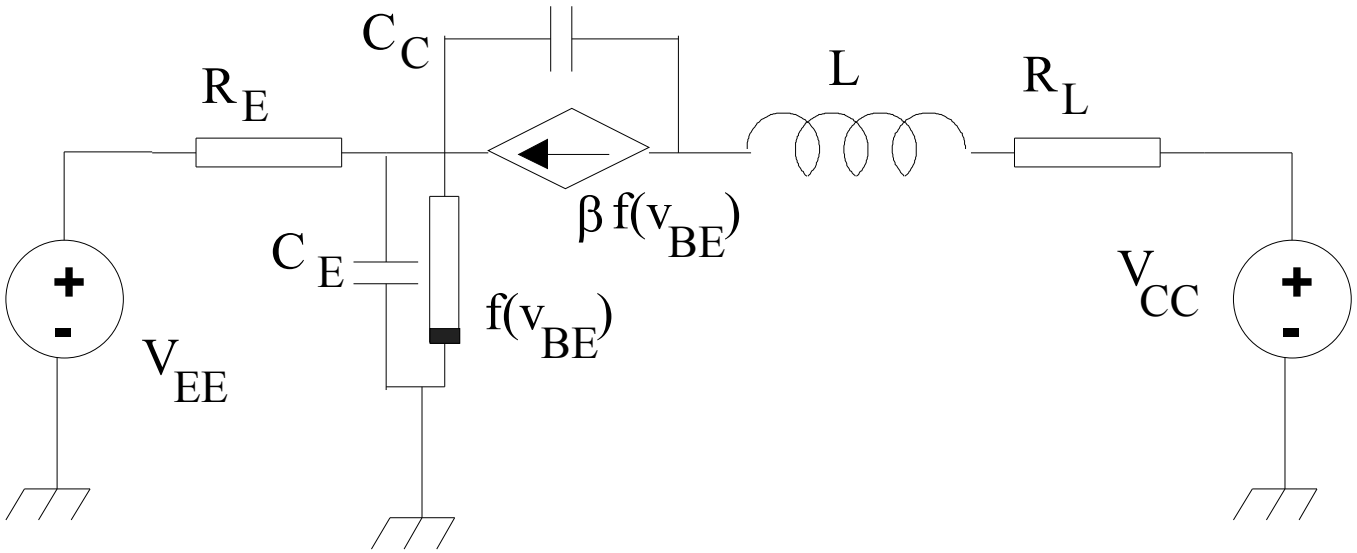
- Ecuatiile constitutive:
  - Elemente reactive: $C \cdot u_C' = i_C \quad L \cdot i_L' = u_L \quad u_C' = f_C(i_C) \quad i_L' = f_L(u_L)$
  - Elemente rezistive: $u = Ri \Leftrightarrow i = Gu \quad u = f_R(i) \quad i = f_G(u)$

- Ecuatiile de legatura:
  - Se construieste **arborele normal**:
    - Toate E; nici o J; Max C; min L; $\forall$ R. $N = n_L + n_C - n_{bC} - n_{nL}$
  - **Variabilele de stare** sunt u_C din arbore si i_L din co-arbore
  - Tensiuni pe coarde = f(tensiuni pe ramuri)
  - Curenti prin ramuri = f(curenti prin coarde)

- Calculul algebric se conduce in forma:
  - Se porneste de la ecuatiile constitutive dinamice (pe elemente reactive)
  - Se inlocuiesc variabilele suplimentare pana raman numai var. de stare

Exemplu

- Oscilatorul Colpitts cu tranzistor bipolar, cu baza la masa:



Oscilatorul Colpitts

- Ecuațiile constitutive: $L \cdot i_L' = v_L; \quad C_C \cdot v_{CE}' = i_{C_C}; \quad C_E \cdot v_{BE}' = i_{C_E};$

  $i_C = \beta \cdot i_B; \quad i_B = f(v_{BE}); \quad v_E = R_E \cdot i_E; \quad v_R = R_L \cdot i_R$

- Ecuațiile de legătură: $V_{EE} = v_{BE} - v_E; \quad V_{CC} = v_R + v_L + v_{CE} + v_{BE}$

  $i_L = i_R; \quad i_L = i_E + i_B + i_{CE}; \quad i_L = i_C + i_{CC}$

- Ecuatiile de stare:

$$\begin{cases} L \cdot i_L' = V_{CC} - R_L \cdot i_L + v_{BE} - v_{CE} \\ C_E \cdot v_{BE}' = -i_L - G_E \cdot v_{BE} - f(v_{BE}) - G_E \cdot V_{EE} \\ C_C \cdot v_{CE}' = i_L - \beta \cdot f(v_{BE}) \end{cases}$$

Caz particular: model exponențial

- Daca se adopta un model exponential pentru caracteristica neliniara baza-emitor la tranzistorul bipolar:

$$f(v) = I_S \cdot (e^{v/V_T} - 1),\ V_T = 0.025V, \quad I_S = 10^{-11} A$$

- Prin inlocuire se obtine:

$$\begin{cases} L \cdot i_L' = V_{cc} - R_L \cdot i_L + v_{BE} - v_{CE} \\ C_E \cdot v_{BE}' = -i_L - G_E \cdot v_{BE} - I_S \cdot (e^{v_{BE}/V_T} - 1) - G_E \cdot V_{EE} \\ C_C \cdot v_{CE}' = i_L - \beta \cdot I_S \cdot (e^{v_{BE}/V_T} - 1) \end{cases}$$

Simularea sistemelor discrete descrise prin ec. de stare

- Pasul de timp cu care se face calculul de simulare = perioada de tact a sistemului discret = perioada de esantionare a semnalelor discrete de intrare, iesire si stare $T = 1$ (valoare normalizata).
- Simularea este de tip tranzitoriu, avant momentul de inceput $k_0 = 0$.
- Simularea se face pe timp finit: $k = k_0, \ldots, K_{Max} = 0, \ldots, \mathrm{L}$
- Ecuatiile de stare: $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f\left(\mathbf{x}[k], e[k]\right) \\ y[k] = g\left(\mathbf{x}[k], e[k]\right) \end{cases}$
- Conditia initiala: $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$
- Semnalul de intrare este cunoscut: $e[k]$; $k = 0, \ldots, \mathrm{L}$
- Calculul se face iterativ pentru ecuatiile dinamice (de stare) si algebric pentru ecuatiile fara memorie (de iesire).

Simularea sistemelor discrete (cont.)

- Calcul iterativ, plecand din conditia initiala:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}[1] = f\left(\mathbf{x}[0], e[0]\right) = f\left(\mathbf{x}_0, e[0]\right) \\
&\mathbf{x}[2] = f\left(\mathbf{x}[1], e[1]\right) \\
&\vdots \\
&\mathbf{x}[L] = f\left(\mathbf{x}[L-1], e[L-1]\right)
\end{aligned}$$

- Calcul algebric pentru determinarea iesirii:

$$y[k] = g\left(\mathbf{x}[k], e[k]\right) \quad k = 0, \ldots, L$$

Legatura intre sistemele analogice si discrete

- Sistemului analogic:

$$S_A : \begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f_A\big(\mathbf{x}(t), e(t)\big) \\ y(t) = g_A\big(\mathbf{x}(t), e(t)\big) \end{cases}$$

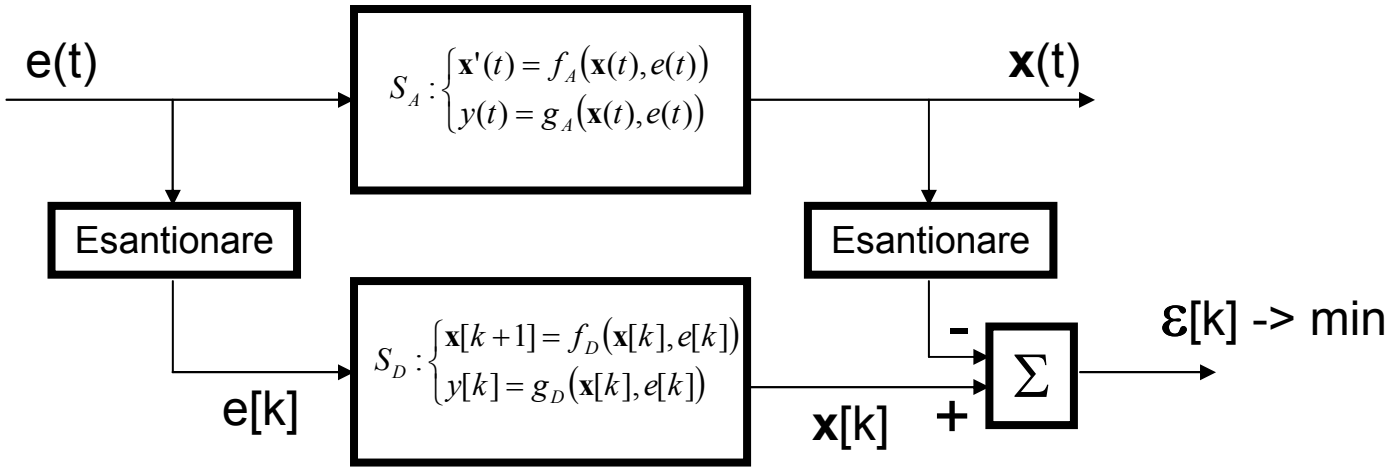
- I se ataseaza un simulator discret:

$$S_D : \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f_D\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \\ y[k] = g_D\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \end{cases}$$

- A carui dinamica este simulata iterativ.

Legatura intre sistemele analogice si discrete

- Criteriul este ca dinamica celor doua sisteme sa difere cat mai putin



- **Teorema esantionarii** permite estimarea erorii de simulare numai in cazul sistemelor **liniare**

Simularea sistemelor analogice descrise prin ec. de stare

- Metoda Euler

$$\left.\begin{array}{l} S_A : \begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f_A\big(\mathbf{x}(t), e(t)\big) \\ y(t) = g_A\big(\mathbf{x}(t), e(t)\big) \end{cases} \\ \mathbf{x}'(t_k) \cong \dfrac{1}{h}\big(\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)\big) \\ h \overset{not}{=} t_{k+1} - t_k \Rightarrow t_k = k \cdot h \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + h \cdot f_A\big(\mathbf{x}(t), e(t)\big) \\ y(t_k) = g_A\big(\mathbf{x}(t_k), e(t_k)\big) \\ \qquad\qquad \mathbf{x}[k] \overset{not}{=} \mathbf{x}(kh) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + h \cdot \mathbf{f}_A\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \\ y[k] = g_A\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \end{cases} \\ \qquad \mathbf{f}_D(\mathbf{x}, e) \overset{not}{=} \mathbf{x} + h \cdot \mathbf{f}_A(\mathbf{x}, e) \\ \qquad g_D(\mathbf{x}, e) \overset{not}{=} g_A(\mathbf{x}, e) \end{array}\right\} \quad S_D : \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f_D\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \\ y[k] = g_D\big(\mathbf{x}[k], e[k]\big) \end{cases}$$

Sisteme autonome si ne-autonome

	Sisteme analogice	Sisteme discrete
▪ Sisteme ne-autonome	$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), e(t)) \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases}$
▪ Sisteme autonome	$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathrm{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathrm{y}(t) = \mathrm{g}(\mathbf{x}(t)) \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k]) \end{cases}$

Legatura intre sistemele ne-autonome si cele autonome:

Var.1: Anularea intrării.

- Ca etapă de analiză:
  - se studiază comportarea dinamică a sistemului aflat numai sub influența stării inițiale, cu intrare nulă,
  - având experiența cunoașterii comportamentului liber al sistemului studiat, să se aprofundeze studiul și asupra situației răspunsului forțat.

Legatura intre sist. ne-autonome si autonome

Var. 2: augumentarea (cresterea dimensiunii) ecuatiilor de stare

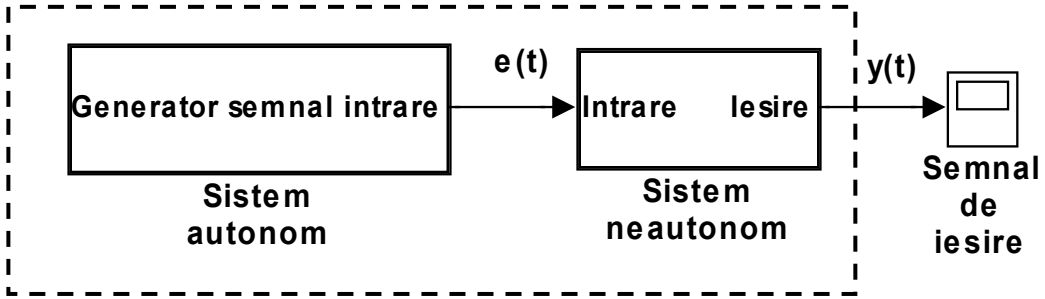
- Pentru intrari **periodice**
- La sistemul **analogic**: $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), e(t)) \end{cases}$
- Augumentam cu ecuatia: $x_{N+1}'(t) = 1 \ (\bmod \ T)$
- In conditii initiale nule ptr. ec. N + 1: $x_{N+1}(0) = 0$
- Se obtine solutia periodica: $x_{N+1}(t) = t \ (\bmod \ T)$
- Care permite rescrierea intrarii in forma: $e(t) = e(x_{N+1}(t))$
- Rezultand sistemul autonom: $\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t), e(x_{N+1}(t))) \\ x_{N+1}'(t) = 1 \ (\bmod T) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), e(x_{N+1}(t))) \end{cases}$

Cazul discret

Augumentarea **ecuatiilor de stare discrete**

- Pentru intrari **periodice**
- La sistemul **discret**: $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases}$
- Augumentam cu ecuatia: $x_{N+1}[k+1] = x_{N+1}[k] + 1 \,(\bmod\ K_{per})$
- In conditii initiale nule: $x_{N+1}[0] = 0$
- Ea are solutia periodica: $x_{N+1}[k] = k \,(\bmod\ K_{per})$
- Care permite rescrierea intrarii in forma: $e[k] = e(x_{N+1}[k])$
- Rezultand sistemul autonom: $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}[k], e\left(x_{N+1}[k]\right)\right) \\ x_{N+1}[k+1] = x_{N+1}[k] + 1 \,(\bmod\ K_{per}) \\ y[k] = g\left(\mathbf{x}[k], e\left(x_{N+1}[k]\right)\right) \end{cases}$

Interpretarea augumentarii sistemului ne-autonom



- Augumentarea cu o singură variabilă de stare este **canonică**
  - Este posibilă numai dacă este cunoscută **formula analitică** a semnalului de intrare, iar acesta este periodic.
- Dacă se cunoaște modelul generatorului (ecuațiile sale de stare),
- Se poate introduce un model complet al generatorului
  - mai complicat dar
  - mai apropiat de structura fizică

Inversarea sensului axei timpului

- Cu respectarea **cauzalitatii**
- Se refera la doua sisteme **distincte**
- Sistemele sunt **autonome**
- **Sistemul de referinta** evolueaza dupa o anumita lege
- Sistemul dual se urmareste sa aiba o **comportare inversa**

- Cazul analogic: $t \quad \leftrightarrow \quad -t$

- Cazul discret: $k+1 \quad \leftrightarrow \quad k$

Inversarea sensului axei timpului: cazul analogic

- **Inversarea** axei timpului: $t \leftrightarrow -t$
- **Schimbarea semnului** derivatei: $\frac{dx}{dt} \leftrightarrow -\frac{dx}{dt}$
- Ecuatiile de stare devin:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(\mathrm{t}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t)) \end{cases}$$

Sisteme analogice liniare

- Ecuatiile de stare: $$\begin{cases} \mathbf{x}'(\mathrm{t}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Inversarea axei timpului: $$\frac{dx}{dt} \leftrightarrow -\frac{dx}{dt}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(\mathrm{t}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Valorile proprii ale matricei de tranzitie a starilor:

$$\begin{cases} \mathbf{A}: \quad s_n \in \mathbb{C}; \quad n = 1 \ldots N \\ -\mathbf{A}: \quad \lambda_n = -s_n \in \mathbb{C}; \quad n = 1 \ldots N \end{cases}$$

Inversarea sensului axei timpului: cazul discret

- Inversarea axei timpului: $k+1 \quad \leftrightarrow \quad k$

- Ecuatiile de stare devin: $\mathbf{x}[k] \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{x}[k+1])$

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}[k+1]$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] \;=\; \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}[k]) \\ y[k] \;=\; g(\mathbf{x}[k]) \end{cases}$$

Sisteme discrete liniare

- Ecuatiile de stare: $$\begin{cases} \mathbf{x}[\mathrm{k}+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] \\ y[k] = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}[k] \end{cases}$$

- Inversarea axei timpului: $k+1 \quad \leftrightarrow \quad k$

$$\begin{cases} \mathbf{x}[\mathrm{k}+1] = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{x}[k] \\ y[k] = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}[k] \end{cases}$$

- Valorile proprii ale matricei de tranzitie a starilor:

$$\begin{cases} \mathbf{A}: \quad z_n \in \mathbb{C}; \quad n = 1 \ldots N \\ \mathbf{A}^{-1}: \quad \lambda_n = 1/z_n \in \mathbb{C}; \quad n = 1 \ldots N \end{cases}$$

Concluzii

- Scrierea ecuatiilor de stare:
- Variabilele de stare se identifica pe baza elementelor cu memorie (dinamice) din circuit
- Numarul ecuatiilor de stare este similar ordinului functiei de transfer
- Aducerea ecuatiilor de stare la forma canonica poate depinde de inversabilitatea unor functii algebrice neliniare
- Simularea ecuatiilor de stare:
- Numai regim tranzitoriu

Bibliografie

- Suport de curs: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Curs\
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- Suport de laborator: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Laborator
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- *I. Ciocoiu, V. Grigoras; "Tehnici moderne de procesare a semnalelor"*

Ed. Cermi 2005 (cap. 4 si 5):

\Lab_Files\6TMPS_CNPS\Tehnici moderne de procesare a semnalelor

- *T. S. Parker, L. O. Chua; "Chaotic Dynamics Algorithms" 1989:*

  \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Chaotic Dynamics Algorithms - Parker & Chua
- *H. G. Schuster; "Deterministic Chaos" 1984*
- *J. Guckenheimer, P. Holmes; "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields" Springer-Verlag 1983*