Technical University
of Iasi, Romania

Faculty of Electronics and
Telecommunications

Signals, Circuits and
Systems laboratory

Circuite neliniare pentru prelucrarea semnalelor

Dinamica haotica

Cuprins

- Ierarhia complexitatii dinamice
  - Teorema de ne-intersectie a traiectoriei
  - Limitari privind ordinele sistemelor analogice
  - Cuantizarea starilor sistemelor neliniare
- Dinamica haotica
  - Definitie
  - Interpretare
  - Exemple
- Aplicatii ale dinamicii haotice
  - Aplicatii in care trebuie evitata dinamica haotica
  - Generatoare de zgomot
  - Sincronizare si modulatie
  - Aplicatii in criptare, autentificare si ne-interventie

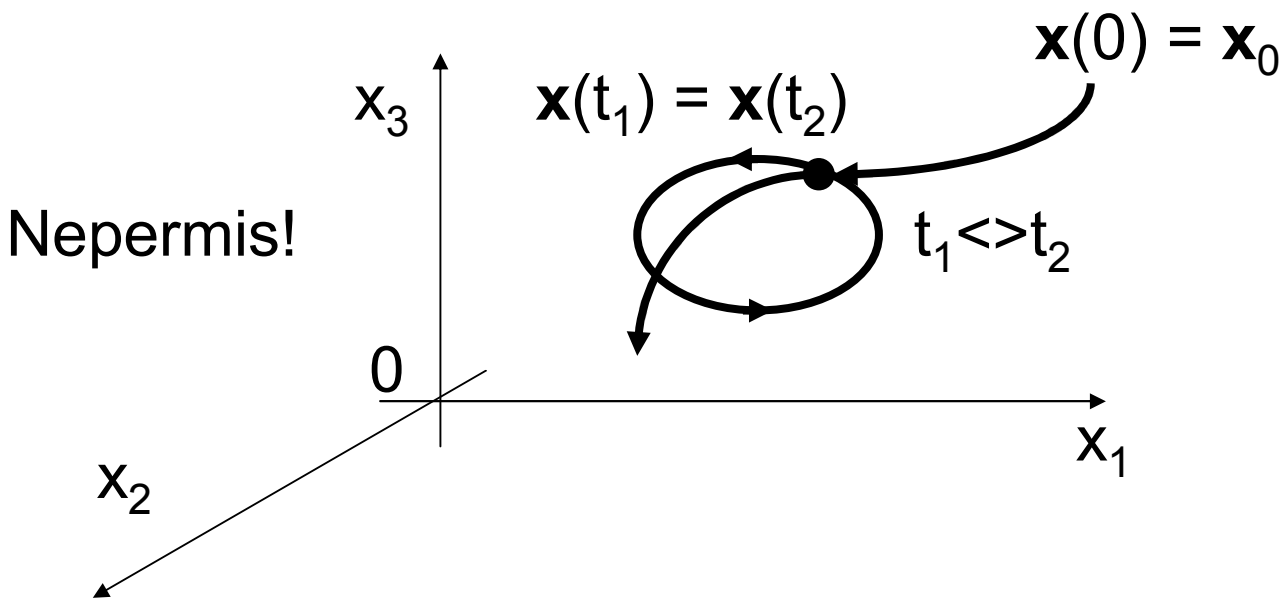
Ierarhia complexitatii dinamice

- Complexitatea dinamicii neliniare:
  - Comportare constanta
  - Dinamica periodica
  - Comportare cuasiperiodica
  - ***Dinamica haotica***
- Dinamica haotica ⇔ nici una dintre comportarile anterioare

Teorema de ne-intersectie a traiectoriei

- **Teorema:** traiectoria evolutiei temporale a starii, **x**, unui sistem neliniar nu se poate intersecta transvers cu ea insasi.

$$\forall t_1 \neq t_2 : \mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$$



Limitari privind ordinele sistemelor analogice

- Pentru a evita autointersectia, sistemele neliniare analogice trebuie sa respecte conditiile:
  - Dinamica de tip constant ⇔ N>=1;
  - Dinamica periodica ⇔ N>1 (N>=1,5 .. 2);
  - Dinamica de tip cuasiperiodic ⇔ N>2 (N>=2,5 .. 3);
  - Dinamica haotica ⇔ N>2 (N>=2,5 .. 3).
- Pentru sistemele in timp discret, nu exista astfel de limitari.

Cuantizarea starilor

- Fie un sistem discret dinamic neliniar autonom:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$$

- Cu o comportare dinamica complexa (cuasi-periodica sau haotica)
- Prin cuantizrea variabilelor de stare

$$\mathbf{x}[k+1] = Q\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}[k])\right)$$

$$Q\left(\mathbf{x}\right) = round\left(\mathbf{x}\right)$$

- El devine un automat finit (state machine) care nu poate avea decat comportare cel mult periodica
- Adaugarea zgomotului de cuantizare la evolutia temporala a variabilelor de stare, nu le face pe acestea mai “zgomotoase” ci, dimpotriva, mai simple d.p.d.v. dinamic.

Sisteme disipative

- **Definiție**: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor
- **f** : $D \rightarrow D$,
- este *disipativ*, dacă divergența derivatei vectorului de stare păstrează semn constant, negativ, pe întreaga durată de evoluție a sistemului.

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_N}$$

•Interpretare geometrica:

$$\frac{dV}{dt} = \oiint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\frac{dV}{dt} = \oiiint_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \, dV$$

$$\oiiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \oiint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Exemplu: sistemul Lorenz

- Ecuatiile de stare ale sistemului Lorenz:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = -\beta z + xy \end{cases}$$

- Duc la concluzia privitoare la disipativitate:

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial z} = -\sigma - 1 - \beta$$

$$\dot{V} = -a \cdot V \quad a = -\sigma - \beta - 1 \qquad V(t) = V(0) \cdot e^{-a \cdot t}$$

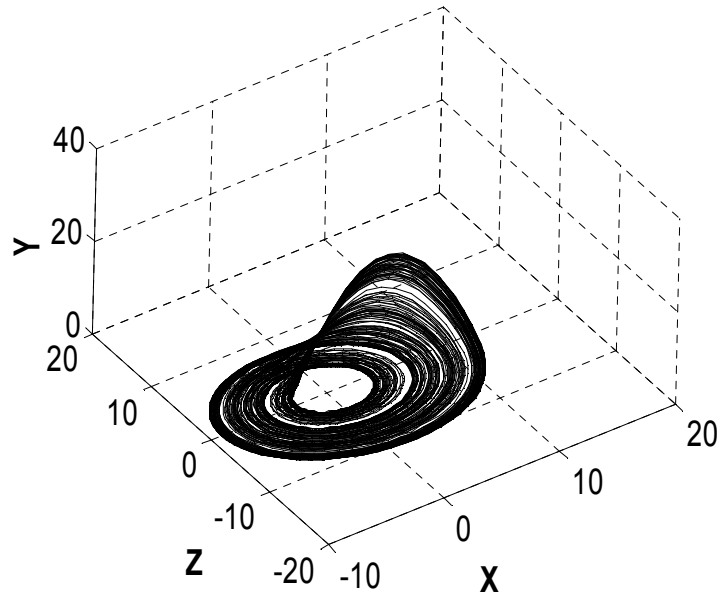
Sisteme ergodice

Definiţie: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor **f** : $D \to D$, este *ergodic* (*topologic tranzitiv)*, dacă există o condiție inițială, $\mathbf{x}_0$, în domeniul *D*, astfel încât orbita sistemului, pornind din această condiție inițială, să fie densă într-un subdomeniu conex și închis, *X*, inclus în *D*

$$Clo\,\{\mathbf{x}(t)\}_{t\geq 0} = X$$

Exemplu: sistemul Rosler:

$$\begin{cases} dx/dt = -y - z \\ dy/dt = x - a \cdot y \\ dz/dt = b + x \cdot z - c \cdot z \end{cases}$$



Sisteme senzitive la variatia conditiei initiale

- **Definiție**: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor **f** : *D* → *D*, este senzitiv la condițiile inițiale dacă există o constantă pozitivă, *M*, astfel ca, pentru oricare două condiții inițiale oricât de apropiate între ele, dar distincte, există un moment de timp după care traiectoriile se distanțează între ele mai mult decât limita impusă, *M*, eventual exceptând o mulțime de momente de masură nulă

$$\exists M \in \Re_+ \ \forall \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0) \in X \quad \left\| \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0) \right\| < \varepsilon$$

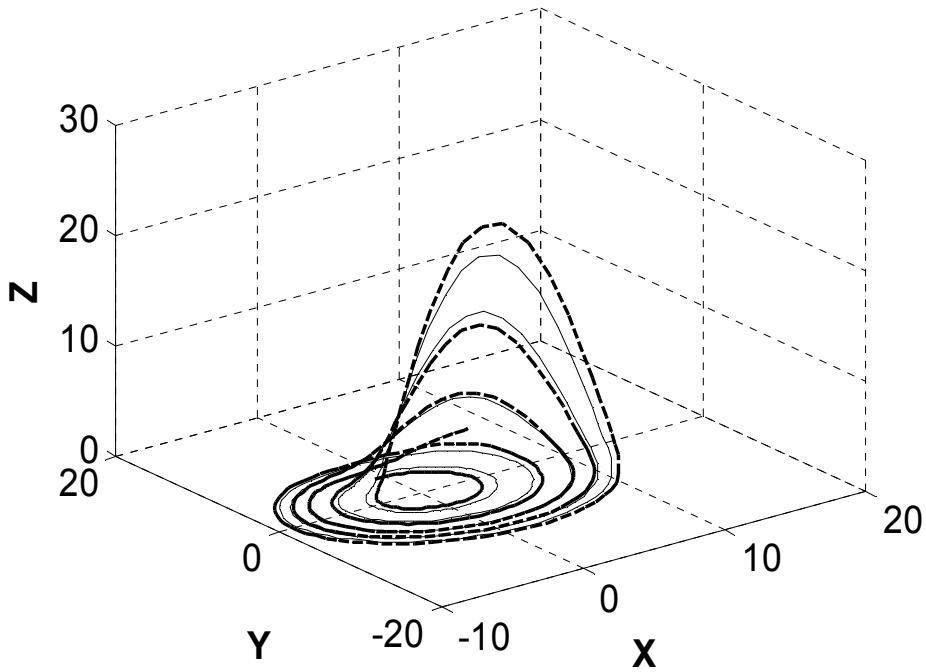
$$\exists T_0 : \forall t \geq T_0 \ d\left(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)\right) \geq M$$

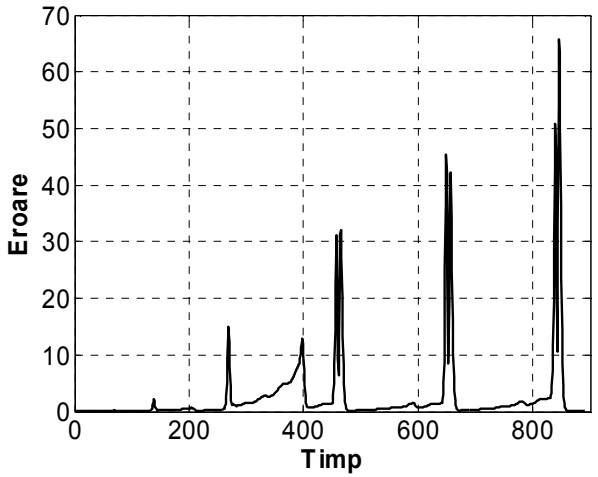
$$\exists M \in \Re_+ \ \forall \mathbf{x}_1[0], \mathbf{x}_2[0] \in X \quad \left\| \mathbf{x}_1[0] - \mathbf{x}_2[0] \right\| < \varepsilon$$

$$\exists K_0 : \forall k \geq K_0 \ d\left(\mathbf{x}_1[k], \mathbf{x}_2[k]\right) \geq M$$

Exemple: sisteme Rosler

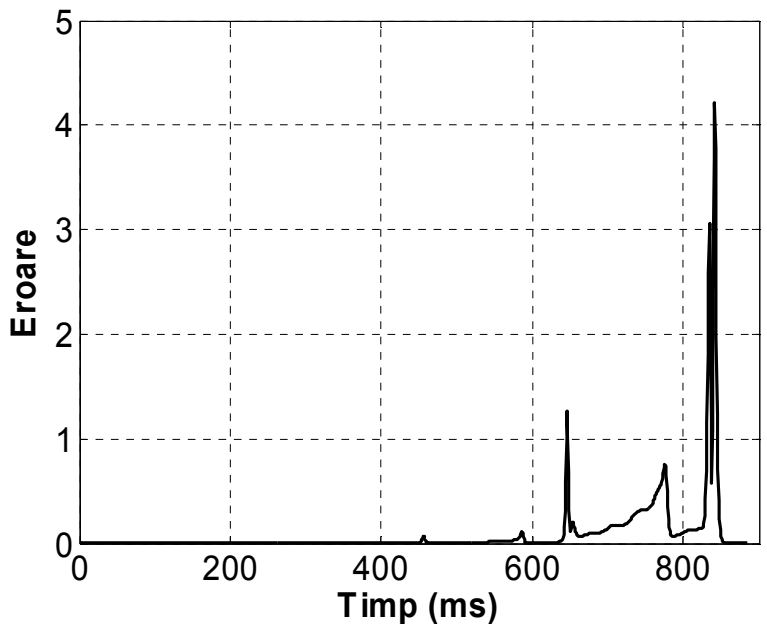
- Pentru doua sisteme Rosler avand aceasi parametri, conditiile initiale difera cu 10^{-3}

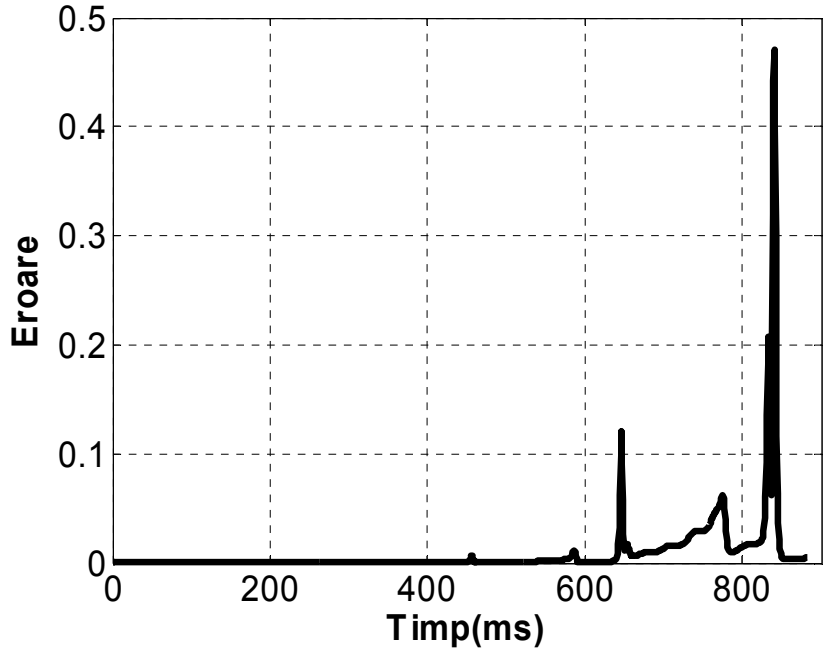




Exemple: sisteme Rosler

- Norma erorii între vectorii de stare a două sisteme Rossler pentru diferenta între parametrii a (stânga) și perturbație aleatoare (dreapta) de 10^{-3}

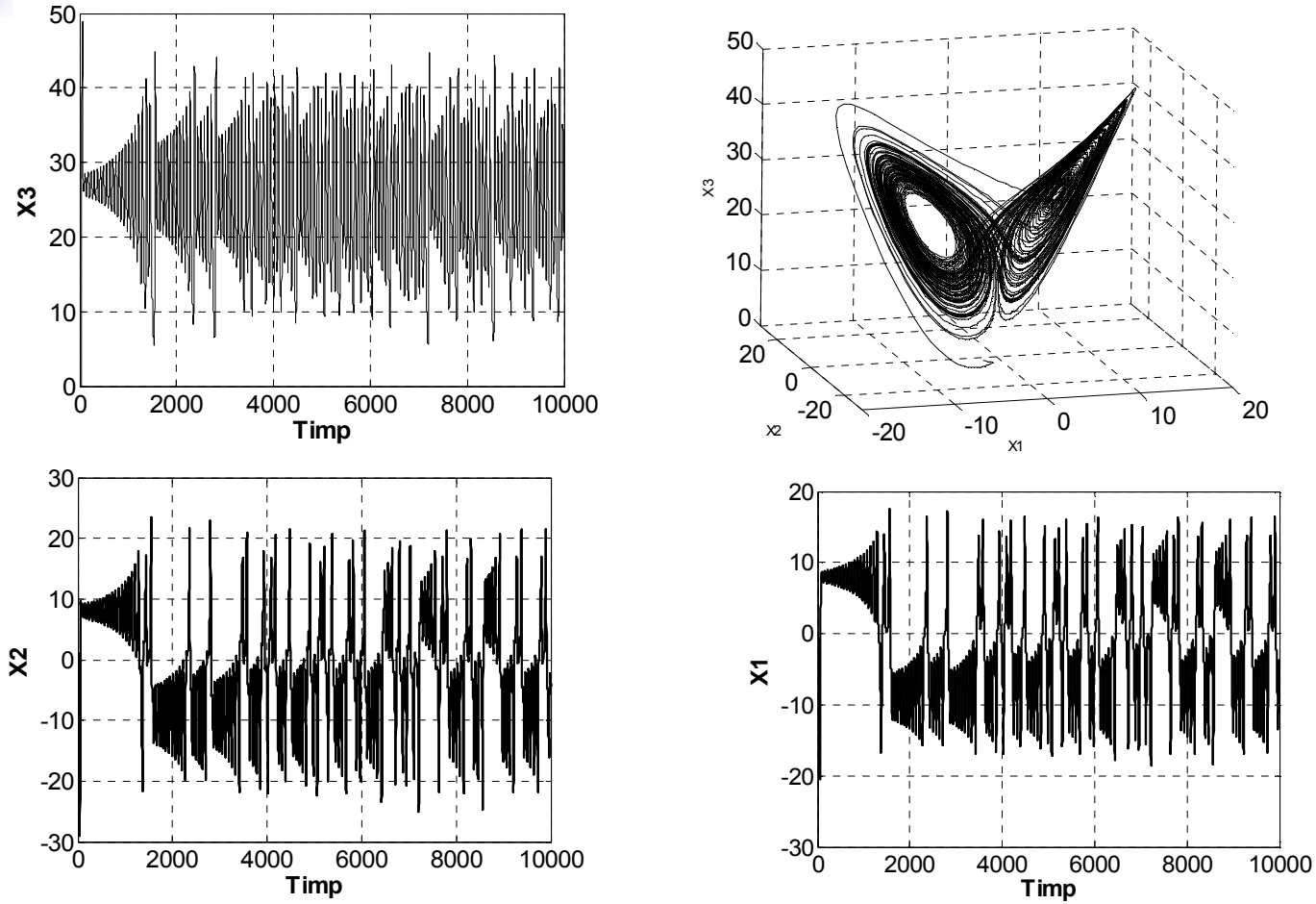




Definitii ale comportarii haotice

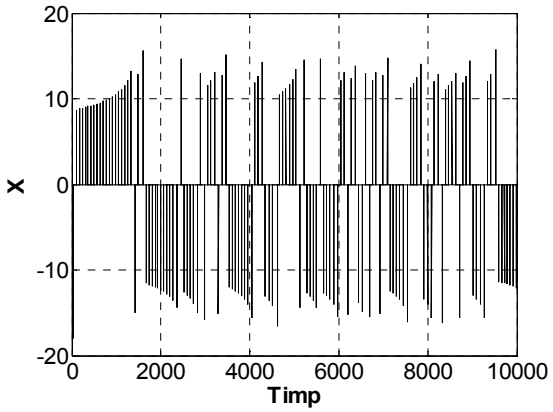
- Există două definiții general acceptate pentru dinamica haotică:
  - definiția slabă datorată lui Wiggins și
  - cea tare introdusă de Devaney.
- **Definiție**: un sistem dinamic, neliniar se numeste *haotic în sens slab*, dacă este:
  - disipativ;
  - senzitiv la condițiile inițiale;
  - ergodic.
- **Definiție**: Pentru a fi *haotic în sens tare*, în plus față de cele trei condiții anterioare, mai este necesar ca domeniul *D* să conțină o infinitate numărabilă, densă în *D*, de cicluri limită repulsoare.
- **Interpretare**: Pornind cu o condiție inițială, $\mathbf{x}_0$, din domeniul *D*, apropierea traiectoriei de un ciclu limită instabil face aceasta să se îndepărteze de respectivul ciclu limită. Mulțimea ciclurilor limită fiind densă, traiectoria sistemului se va apropia de un alt ciclu limită, care însă o va respinge la rândul său. Numărul infinit al ciclurilor limită instabile face ca "ricoșeurile" succesive ale traiectoriei să se extindă pe toată durata evoluției sistemului, fragmentând alura portretului de fază.

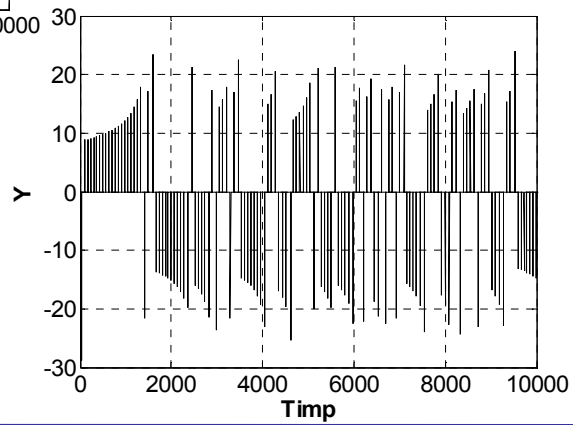
Exemplu: sistemul Lorenz

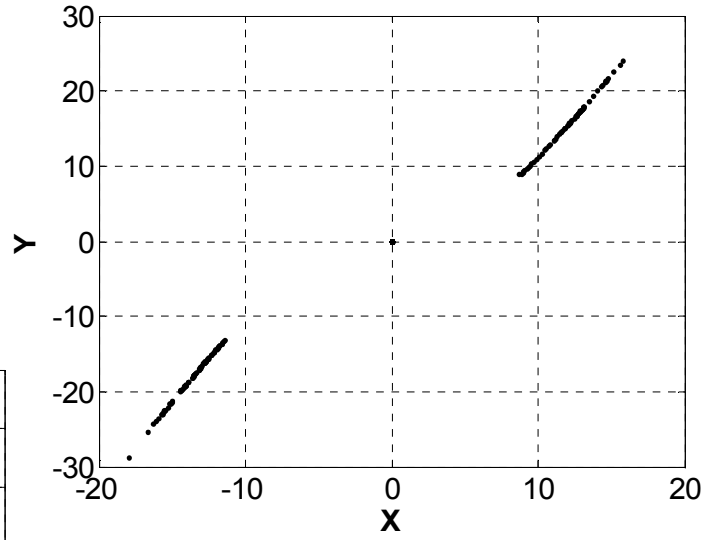


Sectiunea Poincare pentru sisteme haotice

- Pentru un sistem haotic analogic de ordinul *N*, prin secționare Poincare se obține un sistem discret, de ordinul *N* – 1, tot cu o comportare dinamică haotică.







Exponenți Liapunov

- **Definitie:** exponenții Liapunov, exprima tendinta asimptotica de separare a două traiectorii ale unui sistem dinamic, care pornesc din condiții inițiale infinit apropiate.
- În cazul sistemelor analogice, notând cu **u***(t)*,**v***(t)* două traiectorii ale aceluiași sistem *N*-dimensional, plecând din condițiile inițiale **u**(0),**v**(0):

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \left(\lim_{\mathbf{u}(0)\to\mathbf{v}(0)} \frac{u_n(t) - v_n(t)}{u_n(0) - v_n(0)} \right) \quad n = 1, \cdots, N$$

- pentru sisteme în timp discret:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\lim_{\mathbf{u}[0]\to\mathbf{v}[0]} \frac{u_n[k] - v_n[k]}{u_n[0] - v_n[0]} \right) \quad n = 1, \cdots, N$$

Calculul exponentilor Liapunov

- Principiul de calcul se bazează pe liniarizare, dar de-a lungul unei întregi traiectorii.
- Pentru fiecare moment de timp, se deduce sistemul liniarizat în jurul vectorului de stare curent, $\mathbf{x}(t)$, sau $\mathbf{x}[k]$.
- Pentru matricea de tranziție a stărilor, dependentă de timp, $\mathbf{A}(t)$, sau $\mathbf{A}[k]$, se calculează valorile proprii, $\lambda_n(t)$, sau $\lambda_n[k]$.
- Pentru sisteme analogice:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \left(\ln\left|\lambda_n(t)\right|\right) \quad n = 1, \cdots, N$$

- Pentru sisteme discrete:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\ln\left|\lambda_n[k]\right|\right) \quad n = 1, \cdots, N$$

Rezultate calitative

- **Teoremă**: dacă divergența funcției vectoriale de tranziție a stărilor este constantă de-a lungul traiectoriei sistemului, atunci valoarea ei este dată de suma exponenților Liapunov:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t)\right) = \sum_{n=1}^{N} \hat{\lambda}_n$$

- **Concluzie:**
  - pentru sisteme conservative, suma exponenților Liapunov este nulă
  - pentru sisteme disipative, suma exponenților Liapunov este negativă.

- **Teoremă**: valoarea exponenților Liapunov nu depinde de condiția inițială din care pornește traiectoria sistemului, atâta timp cât aceasta se limitează la bazinul de atracție al aceleiași mulțimi limită.
- **Concluzie:**
  - Acest rezultat ne asigură de faptul că orice traiectorie utilizată in calculul aproximativ, este matematic validă.
  - Nu ni se oferă însă aceleași garanții privind viteza de convergență.

Ierarhia complexitatii dinamice: exponentii Liapunov

Dinamica neliniară poate fi clasificată, luând în considerație valorile ***exponenților Liapunov***, în forma:

- În cazul *dinamicii constante*, toți exponenții Liapunov sunt **negativi**;
- *Dinamica periodică* este caracterizată de **un exponent Liapunov nul**, iar restul negativi;
- **Mai multi exponenţi Liapunov nuli**, iar restul negativi, implică o *dinamică de tip cuasiperiodic*;
- Cel puțin **un exponent Liapunov pozitiv**, restul fiind nuli sau negativi, conduce la concluzia de *dinamică haotică*
- situația mai multor **exponenţi Liapunov pozitivi** poartă numele de *hiperhaos*.

Concluzii

- Dinamica haotica este cea mai complexa comportare a sistemelor neliniare
- Ea apare in mod natural intr-o multitudine de fenomene fizice, chimice, biologice, sociale si economice
- Dinamica haotica este ne-predictibila datorita senzitivitatii sistemelor neliniare avand un asemenea comportament
- In consecinta, o traiectorie particulara a sistemului este putin relevanta, constante fiind marimile statistice (medie, dispersie, autocorelatie, densitate spectrala de putere, exponenti Liapunov, masuri …)
- Alura semnalelor generate de un oscilator haotic este similara perturbatiilor aleatoare
- Acest tip de zgomot este riguros ergodic (media statistica = media temporala) datorita ergodicitatii sistemului
- Prin cuantizarea starilor, un sistem haotic devine periodic, posibil prin stabilizarea unuia sau mai multor cicluri limita, initial instabile

Bibliografie

- Suport de curs: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Curs\
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- Suport de laborator: \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Suport_Laborator
  - www.scs.etc.tuiasi.ro/
- *I. Ciocoiu, V. Grigoras; "Tehnici moderne de procesare a semnalelor"*

Ed. Cermi 2005 (cap. 4 si 5):

- \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Tehnici moderne de procesare a semnalelor
- *T. S. Parker, L. O. Chua; "Chaotic Dynamics Algorithms" 1989:*
  - \Lab_Files\6TMPS_CNPS\Chaotic Dynamics Algorithms - Parker & Chua
- *H. G. Schuster; "Deterministic Chaos" 1984*
- *J. Guckenheimer, P. Holmes; "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields" Springer-Verlag 1983*