

Capitolul **4**

Noțiuni de dinamică neliniară

- 4.1 Introducere
- 4.2 Caracterizarea circuitelor neliniare
- 4.3 Tipuri de comportări dinamice
- 4.4 Concluzii

4 Noțiuni de dinamică neliniară

4.1 Introducere

Abordarea sistemică a problemelor ingineresti, legate de prelucrarea semnalelor, presupune dezvoltarea unui model matematic adecvat pentru sistemele analizate. Pentru dezvoltarea structurată a unui model sistemic este necesară *delimitarea sistemului* studiat, specificarea *interacțiunilor acestuia cu mediul înconjurător* și *funcționalitatea* sistemului fizic supus procesului de modelare.

Delimitarea sistemului de mediul înconjurător are, cu precădere un caracter spațial, dar, în subsidiar implică și un caracter noțional sau informațional, conținând uzual și un început de specificare a structurii sale prin identificarea subsistemelor din care este compus.

Interacțiunile cu mediul se grupează în semnale de intrare (modelând influența mediului asupra sistemului) și de ieșire (modelând influența sistemului asupra mediului). Din punctul de vedere al legăturilor cu exteriorul, sistemele pot fi autonome, atunci când nu apare intrarea în mod explicit în ecuațiile ce constituie modelul, sau ne-autonome, în cazul în care se introduce intrarea în modelul matematic al sistemului.

Funcționalitatea sistemului se specifică printr-un set de ecuații care să modeleze prelucrările semnalelor de intrare ce duc la obținerea ieșirilor. Un element esențial în obținerea operatorilor matematici care modelează aceste procese îl constituie *dinamica internă* a sistemului analizat. Aceasta evidențiază caracterul cu memorie (dinamic) al prelucrărilor de semnal, atunci când sistemele nu sunt pur algebrice, impunând amprenta specifică sistemului analizat asupra ieșirilor acestuia. Obținerea ecuațiilor reprezentând operatorul matematic ce modelează sistemul studiat se poate face în două moduri: *structural*, prin evidențierea subsistemelor cu ecuațiile lor constitutive și a conexiunilor acestora, modelate de ecuațiile de legătură, sau *funcțional*, prin determinarea intrare-ieșire a unui model de tip cutie neagră (black box).

Modelele sistemelor dinamice pot fi în timp continuu (analogice), modelate de ecuații diferențiale, sau în timp discret (discrete), modelate cu ecuații cu diferențe. Pentru asigurarea realizabilității fizice, modelele matematice obținute trebuie să respecte principiul cauzalității, ceea ce nu exclude prezența, în etapele intermediare, de calcul, a unor modele ne-cauzale.

Sistemele neliniare, la care vom face referire în continuare, pot dezvolta o dinamică mult mai complexă decât cele liniare, cu proprietăți dificil de evidențiat pur algebric. Nivelul de abstractizare al modelului poate fi ierarhizat în categoriile: modele analitice, geometrice și algebrice. Cu cât modelul este mai abstract, cu atât oferă o caracterizare mai globală și implică un număr mai mic de calcule analitice pentru evidențierea proprietăților sistemului. Un exemplu grăitor îl reprezintă sistemele liniare, pentru care abordarea frecvențială, bazată pe transformate de tip Laplace sau Z , permite algebrizarea ecuațiilor diferențiale sau cu diferențe, liniare și invariante, ce reprezintă modelul de bază, analitic, al sistemului de prelucrare de semnal. Modelele de nivel geometric permit studiul dinamicii interne a sistemului studiat, plecând, nu de la o condiție inițială unică, ci de la o întregă mulțime de condiții inițiale, structurată geometric sub forma unei varietăți diferențiale. Dinamica sistemului studiat se va reflecta prin modificările aduse în timp de sistem varietății diferențiale de condiții inițiale. Aceasta poate da sugestii intuitive asupra prelucrărilor de semnal pentru care sistemul este cel mai eficient.

Domeniul de studiu al dinamicii neliniare este mai recent și mai dificil decât cel al sistemelor liniare, implicit mai puțin maturizat decât acesta. De aceea, abordarea prezentată în continuare va fi una analitică, conținând doar sugestii de algebrizare prin dinamică simbolică a sistemelor haotice. În paragraful ce urmează se va evidenția eficiența modelului bazat pe ecuații de stare, atât din punctul de vedere al studiului comportării dinamice, cât și al posibilităților de implementare. Al treilea paragraf este orientat spre evidențierea diverselor tipuri de comportări dinamice, în ordinea crescătoare a complexității lor.

4.2 Caracterizarea circuitelor neliniare

4.2.1 Caracterizarea intrare - ieșire

Caracterizarea sistemelor prin abordarea intrare – ieșire este cea mai simplă variantă, oferind informații suficiente privitoare la comportarea sistemelor liniare cu memorie sau neliniare algebrice. În această abordare, se iau în considerație numai semnalele caracterizând influența mediului asupra sistemului, intrările, și influența sistemului asupra mediului, deci ieșirile. Ne luându-se în considerare și evoluția temporală a semnalelor ce caracterizează influențele reciproce între subsistemele ce compun sistemul analizat, adică variabilele de stare, acest tip de caracterizare nu subliniază dinamica internă a sistemului studiat.

În cazul sistemelor liniare, abordarea intrare – ieșire este deosebit de eficientă, datorită metodelor frecvențiale, de tip Laplace, Z sau Fourier, care furnizează o mărime caracterizând global funcționarea sistemului și anume funcția de transfer. În cazul neliniar, metodele frecvențiale își pierd utilitatea, reducând astfel și eficiența caracterizării intrare – ieșire.

Sistemele analogice neautonome sunt descrise prin ecuații diferențiale de ordin egal cu ordinul sistemului, N , în care intrările și ieșirile, împreună cu derivatele lor sunt legate printr-o funcție algebrică neliniară. În cel mai general caz, sistemul poate fi multi – intrare, multi – ieșire, intrarea $\mathbf{e}(t)$ și ieșirea $\mathbf{y}(t)$ fiind vectori:

$$f(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(N)}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{e}'(t), \dots, \mathbf{e}^{(M)}(t)) = 0 \quad (4.1)$$

În majoritatea cazurilor ce urmează, dacă nu se specifică altfel, sistemul prezintă o singură intrare și o singură ieșire, $e(t)$ și $y(t)$ fiind scalari:

$$f(y(t), y'(t), \dots, y^{(N)}(t), e(t), e'(t), \dots, e^{(M)}(t)) = 0 \quad (4.2)$$

Dacă funcția neliniară, $f(\dots)$, o permite, este utilă explicitarea ecuației diferențiale implicite de mai sus în forma:

$$y(t) = f_0(y'(t), \dots, y^{(N)}(t), e(t), e'(t), \dots, e^{(M)}(t)) \quad (4.3)$$

Cazul particular al sistemelor neliniare autonome este caracterizat de ecuații diferențiale în care nu este prezent semnalul de intrare, de forma:

$$f(y(t), y'(t), \dots, y^{(N)}(t)) = 0 \quad (4.4)$$

respectiv:

$$y(t) = f_0(y'(t), \dots, y^{(N)}(t)) \quad (4.5)$$

Situația sistemelor liniare neautonome este obținută prin înlocuirea funcțiilor neliniare algebrice cu combinații liniare, cu coeficienți constanți:

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot e^{(m)}(t) \quad (4.6)$$

În cazul unui sistem linear autonom membrul drept este nul, rezultând forma particulară:

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot y^{(n)}(t) = 0 \quad (4.7)$$

Sistemele discrete pot fi modelate într-un mod similar, utilizând însă ecuații cu diferențe în locul celor diferențiale. Cazul nelinier neautonom poate fi multi – intrare / multi – ieșire:

$$f(\mathbf{y}[k], \mathbf{y}[k-1], \dots, \mathbf{y}[k-N], \mathbf{e}[k], \mathbf{e}[k-1], \dots, \mathbf{e}[k-M]) = 0 \quad (4.8)$$

Pentru simplitatea notațiilor însă, în cele ce urmează, sistemele prezentate vor fi cu o singură intrare și o singură ieșire, $e[k]$ și $y[k]$ fiind scalari:

$$f(y[k], y[k-1], \dots, y[k-N], e[k], e[k-1], \dots, e[k-M]) = 0 \quad (4.9)$$

Ca și în cazul analogic, vom căuta, acolo unde este posibil, să explicităm semnalul de ieșire, în forma sa ne-decalată în timp, din ecuația implicită (4.9), în forma:

$$y[k] = f_0(y[k-1], \dots, y[k-N], e[k], e[k-1], \dots, e[k-M]) \quad (4.10)$$

Cazul autonom se simplifică prin eliminarea semnalului de intrare din ecuația (4.10), rezultând formula (4.11):

$$f(y[k], y[k-1], \dots, y[k-N]) = 0 \quad (4.11)$$

Și în acest caz, explicitarea semnalului de ieșire aduce avantaje atât pentru dezvoltarea algoritmilor de calcul a soluțiilor cât și pentru realizarea de scheme bloc pentru implementarea unui astfel de sistem:

$$y[k] = f_0(y[k-1], \dots, y[k-N]) \quad (4.12)$$

În cazul liniar, exprimările anterioare se particularizează, similar sistemelor analogice, în formă ne – autonomă:

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^M b_m e[k-m] \quad (4.13)$$

respectiv autonomă:

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = 0 \quad (4.14)$$

4.2.2 Caracterizarea intrare – stare – ieșire

4.2.2.1 Ecuații de stare

Abordarea bazată pe ecuații de stare, evidențiază și structura, implicit dinamica, internă a sistemului analizat. În acest mod se înlocuiește ecuația, fie diferențială, fie cu diferențe, de ordinul N , cu N ecuații corespunzătoare de ordinul I, la care se adaugă o ecuație algebrică de ieșire. Această abordare analitică se traduce, din punctul de vedere al implementării, prin evidențierea a N subsisteme de ordinul I interconectate conform funcțiilor neliniare, de tranziție a stării, după o topologie generică sugerată de figura 4.1.

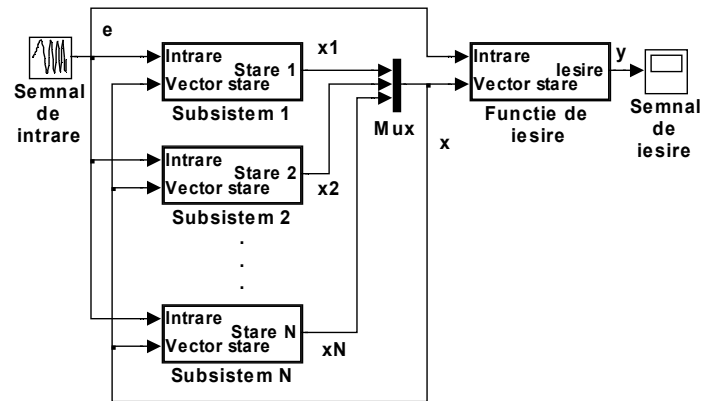


Fig. 4.1 Schemă bloc generică bazată pe principiul ecuațiilor de stare

În acest mod se evidențiază influența semnalului de intrare, e , asupra tuturor variabilelor de stare, x_n , $n = 1, \dots, N$, deducerea ieșirii, y , din intrare și stare, în mod algebric și gruparea variabilelor de stare într-un vector de stare:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Pentru un sistem analogic, neliniar și ne – autonom, ecuațiile de stare au forma vectorială:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), e(t)) \end{cases} \quad (4.16)$$

În ecuația (4.16) mărimile au semnificațiile:

- prima ecuație vectorială reprezintă sistemul de ecuații de stare
- a doua ecuație este denumită ecuație de ieșire
- $e(t)$ și $y(t)$ reprezintă semnalele de intrare, respectiv ieșire
- $\mathbf{x}(t)$ notează vectorul N – dimensional al variabilelor de stare:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

- \mathbf{f} și g reprezintă funcții algebrice neliniare:
- $f : \mathfrak{R}^{N+1} \rightarrow \mathfrak{R}^N$ este funcția, vectorială de argument vectorial, de tranziție a stărilor, iar
- $g : \mathfrak{R}^{N+1} \rightarrow \mathfrak{R}$ este funcția scalară de ieșire.

Cu aceste notații precizate, sistemul de ecuații de stare poate fi detaliat:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_N(t), e(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_N(t), e(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) = f_N(x_1(t), \dots, x_N(t), e(t)) \end{cases} \quad (4.18)$$

Cazul sistemelor neliniare autonome conduce la ecuații de stare de forma (4.19), în care semnalele de intrare nu mai sunt prezente.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ y(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (4.19)$$

Sistemele liniare sunt descrise de ecuații în care funcțiile algebrice neliniare sunt înlocuite de combinații liniare cu coeficienți constanți. Ecuațiile de stare au coeficienții structurați în formă de matrici și vectori, așa cum este prezentat în relația (4.20) pentru un sistem neautonom:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \cdot e(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) + d \cdot e(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

Cazul autonom se simplifică prin eliminarea termenilor conținând semnalul de intrare, ajungându-se la forma (4.21):

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.21)$$

Sistemele discrete sunt descrise de ecuații de stare bazate pe ecuații de ordinul 1 cu diferențe. În cazul neliniar și ne – autonom, acestea au forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases} \quad (4.22)$$

Pentru sistemele neliniare autonome ajungem la ecuații de stare simplificate de forma (4.23).

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k]) \end{cases} \quad (4.23)$$

Ecuațiile de stare pentru sisteme liniare neautonome au o formă similară cazului analogic, cu diferența legată de elementul cu memorie. În loc de derivare, apare întârzierea cu un tact:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] + \mathbf{b} \cdot e[k] \\ y[k] = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}[k] + d \cdot e[k] \end{cases} \quad (4.24)$$

Sistemele discrete liniare, dar autonome, au ecuații de stare de tipul (4.25).

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] \\ y[k] = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}[k] \end{cases} \quad (4.25)$$

4.2.2.2 Legătura între sistemele autonome și neautonome

Comparând ecuațiile ce descriu sistemele ne – autonome și autonome, apare ca variantă de studiu evidentă anularea intrării. Ca etapă de analiză a unui sistem neliniar, această variantă este viabilă: Întâi se studiază comportarea dinamică a sistemului aflat numai sub influența stării inițiale, cu intrare nulă, urmând ca apoi, având experiența cunoașterii comportamentului liber al sistemului studiat, să se aprofundeze studiul și asupra situației răspunsului forțat.

Există însă și posibilitatea studiului dinamicii forțate, păstrând forma autonomă a ecuațiilor, prin creșterea ordinului acestora. Această variantă este posibilă în cazul excitațiilor periodice. Pornim de la sistemul neliniar, analogic, ne – autonom, descris de ecuațiile de stare, cu dimensiunea sistemului N :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(t)) \quad (4.26)$$

La cele N ecuații de stare, ale sistemului ne – autonom, se adaugă o ecuație suplimentară [1], care urmărește generarea unei soluții proporționale cu variabila independentă, cu interpretare de timp, și cu repetare periodică, de perioadă T :

$$x_{N+1}'(t) = 1 \pmod{T} \quad (4.27)$$

În cazul integrării, cu o condiție inițială nulă, $x_{N+1}(0) = 0$, variabila de stare suplimentară devine:

$$x_{N+1}(t) = t \pmod{T} \quad (4.28)$$

Astfel putem genera semnalul prototip, periodic, de intrare, folosind formula de calcul a acestuia drept funcție neliniară aplicată noii variabile de stare:

$$e(t) = e(x_{N+1}(t)) \quad (4.29)$$

În acest mod rezultă sistemul augumentat:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(x_{N+1}(t))) \\ x_{N+1}'(t) = 1 \pmod{T} \\ y(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), e(x_{N+1}(t))) \end{cases} \quad (4.30)$$

Acesta este autonom, dar de ordin cu o unitate mai mare. Construcția sistemului augumentat poate fi interpretată ca fiind includerea modelului generatorului care atacă intrarea sistemului ne – autonom studiat în interiorul modelului augumentat, care devine astfel autonom.

Sistemele în timp discret se tratează în aceeași manieră, pornind de la ecuațiile de stare de ordin N :

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases} \quad (4.31)$$

La ecuațiile de stare ale sistemului ne – autonom, se adaugă o ecuație suplimentară, generând prototipul periodic, de perioadă fundamentală K_{per} :

$$x_{N+1}[k+1] = x_{N+1}[k] + 1 \pmod{K_{per}} \quad (4.32)$$

Acesta are soluția evidentă:

$$x_{N+1}[k] = k \pmod{K_{per}} \quad (4.33)$$

Obținută în condiție inițială nulă:

$$x_{N+1}[0] = 0 \quad (4.34)$$

Similar situației sistemelor analogice, putem genera semnalul de intrare, prelucrând, cu un circuit algebric, descris de o funcție neliniară, noua variabilă de stare:

$$e[k] = e(x_{N+1}[k]) \quad (4.35)$$

În acest mod rezultă sistemul discret, autonom, augmentat, de forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e(x_{N+1}[k])) \\ x_{N+1}[k+1] = x_{N+1}[k] + 1 \pmod{K_{per}} \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e(x_{N+1}[k])) \end{cases} \quad (4.36)$$

Acesta este autonom, dar de ordin cu o unitate mai mare.

Includerea modelului generatorului care atacă intrarea sistemului neliniar neautonom studiat în interiorul modelului global, care devine astfel autonom, evidențiază faptul că intrările sunt, la rândul lor, generate de subsisteme.

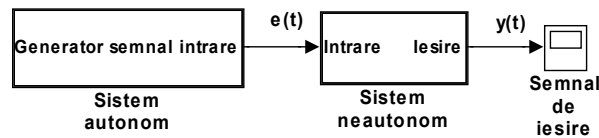


Fig. 4.2 Schemă bloc sugerând interpretarea intuitivă a incrementării ordinului sistemului

Augmentarea cu o singură variabilă de stare este canonică (minimală ca dimensiune) și generală. Dar ea este posibilă numai dacă este cunoscută formula analitică a semnalului de intrare, iar acesta este periodic. Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, dar se cunoaște modelul generatorului (de exemplu dat prin ecuațiile sale de stare), rezultă ca fiind mai intuitivă introducerea unui model mai complicat dar mai apropiat de structura fizică de implementare în sistemul autonom global.

4.2.2.3 Scrierea ecuațiilor de stare

Scrierea ecuațiilor de stare pentru sisteme neliniare urmează aceleași principii cu orice abordare a trecerii de la modelul fizic (de ex. schema electrică sau bloc a unui circuit electronic) la cel matematic, reprezentat de un set de ecuații:

- se identifică structura sistemului (subsisteme și modul lor de interconectare)
- se adoptă modele matematice pentru toate subsistemele
- se alege cea mai avantajoasă modelare matematică a modului de interconectare a subsistemelor
- se prelucrează ecuațiile rezultate din ultimele două etape pentru a le aduce la forma dorită

În cazul circuitelor neliniare, scrierea ecuațiilor de stare este similară celei întâlnite la circuite liniare, cu remarcă necesității, în anumite cazuri, a inversabilității unor funcții algebrice neliniare, caracterizând elementele de circuit funcționând în regim neliniar.

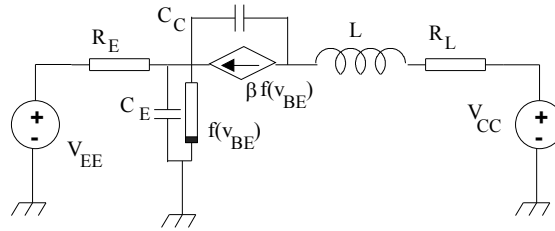


Fig. 4.3 Schema echivalentă a oscilatorului Colpitts realizat cu tranzistor bipolar conectat cu baza la masă

Primul exemplu abordat se referă la un circuit neliniar, analogic, autonom și anume oscilatorul Colpitts. Abordăm numai exemplul cu tranzistor bipolar, pe care îl vom mai întâlni în alte ipostaze în studiul dinamicii neliniare. Circuitul este un amplificator cu baza la masă, cu sarcina inductivă și reacție din colector în emitor prin divizor capacitiv. Schema echivalentă este redată în figura 4.3.

Circuitul este de ordinul trei, după numărul elementelor reactive din circuit și este caracterizat de variabilele de stare i_L , v_{BE} , v_{CE} .

Prima etapă ce trebuie parcursă, constă în identificarea ecuațiilor constitutive pentru toate elementele din circuit:

$$\begin{aligned} L \cdot i_L' &= v_L; & C_C \cdot v_{CE}' &= i_{C_C}; & C_E \cdot v_{BE}' &= i_{C_E}; \\ i_C &= \beta \cdot i_B; & i_B &= f(v_{BE}); & v_E &= R_E \cdot i_E; & v_R &= R_L \cdot i_R \end{aligned} \quad (4.37)$$

Urmează scrierea ecuațiilor de legătură, pe baza teoremelor Kirkhoff:

$$\begin{aligned} V_{EE} &= v_{BE} - v_E; & V_{CC} &= v_R + v_L + v_{CE} + v_{BE} \\ i_L &= i_R; & i_L &= i_E + i_B + i_{C_E}; & i_L &= i_C + i_{C_C} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pornind calculele de la ecuațiile elementelor reactive și făcând înlocuiri între ecuațiile (4.37) și (4.38), se obțin ecuațiile de stare ale circuitului propus de forma:

$$\begin{cases} L \cdot i_L' = V_{CC} - R_L \cdot i_L + v_{BE} - v_{CE} \\ C_E \cdot v_{BE}' = -i_L - G_E \cdot v_{BE} - f(v_{BE}) - G_E \cdot V_{EE} \\ C_C \cdot v_{CE}' = i_L - \beta \cdot f(v_{BE}) \end{cases} \quad (4.39)$$

Dacă adoptăm un model exponențial pentru caracteristica neliniară a joncțiunii bază – emitor a tranzistorului bipolar:

$$f(v) = I_S \cdot (e^{v/V_T} - 1), \quad V_T = 0.025V, \quad I_S = 10^{-11} A \quad (4.40)$$

unde I_S este curentul de saturație al joncțiunii și $V_T = \frac{KT}{q}$ tensiunea termică,

obținem ecuațiile de stare în forma detaliată:

$$\begin{cases} L \cdot i_L' = V_{cc} - R_L \cdot i_L + v_{BE} - v_{CE} \\ C_E \cdot v_{BE}' = -i_L - G_E \cdot v_{BE} - I_S \cdot (e^{v_{BE}/V_T} - 1) - G_E \cdot V_{EE} \\ C_C \cdot v_{CE}' = i_L - \beta \cdot I_S \cdot (e^{v_{BE}/V_T} - 1) \end{cases} \quad (4.41)$$

Un al doilea exemplu se referă la un filtru discret, recursiv, cu depășire în virgulă fixă, de ordinul N . Pornim de la modelul liniar, descris de ecuația cu diferențe:

$$y[k] = u[k] + \sum_{n=1}^N a[n] \cdot y[k-n] \quad (4.42)$$

Filtrul discret poate ajunge să funcționeze în regim neliniar, dacă se ajunge la depășiri, în special în virgulă fixă. Varianta depășirii de tip periodic este caracterizată de funcția algebrică neliniară:

$$r(u) = u - \text{round}(u) \quad (4.43)$$

reprezentată grafic în figura 4.4.

Ținând cont de depășirile în virgulă fixă de tip periodic, ecuația cu diferențe ce descrie filtrul discret capătă forma neliniară:

$$y[k] = r\left(u[k] + \sum_{n=1}^N a[n] \cdot y[k-n]\right) \quad (4.44)$$

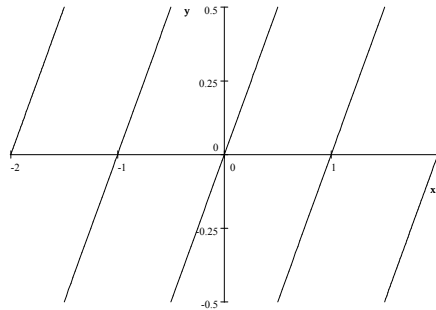


Fig. 4.4 Reprezentare grafică a funcției neliniare de tip depășire în virgulă fixă

Schema bloc echivalentă a unui asemenea filtru este reprezentată în figura 4.5. Pe această schemă identificăm elementele de memorare și alegem drept variabile de stare ieșirile acestora, ținând cont de ecuațiile lor constitutive, de forma:

$$x_n[k+1] = e_n[k]; \quad n = 1, \dots, N \quad (4.45)$$

Ținând cont și de ecuațiile constitutive ale elementelor de sistem liniare:

$$y_n[k] = a_n \cdot e_n[k]; \quad y[k] = \sum_{n=1}^N y_n[k] \quad (4.46)$$

ajungem la forma ecuațiilor de stare, prezentată în relația (4.47).

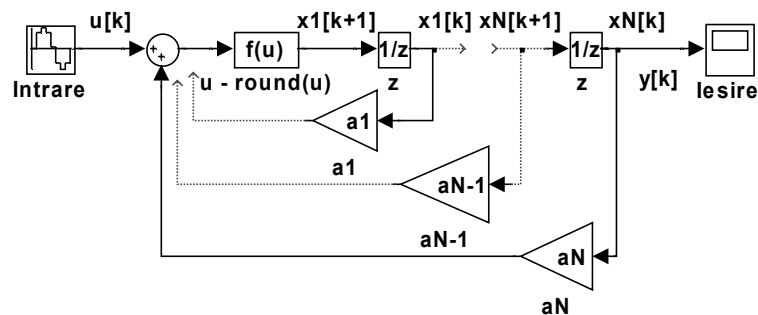


Fig. 4.5 Schema bloc echivalentă a filtrului digital recursiv cu neliniaritate de depășire

$$\begin{cases} x_1[k+1] = r \left(u[k] + \sum_{n=1}^N a[n] \cdot x_n[k] \right) \\ x_2[k+1] = x_1[k] \\ \vdots \\ x_N[k+1] = x_{N-1}[k] \end{cases} \quad (4.47)$$

Luând în considerație și forma explicită a neliniarității de depășire, (4.43), rezultă:

$$\begin{cases} x_1[k+1] = u[k] + \sum_{n=1}^N a[n] \cdot x_n[k] - \text{round} \left(u[k] + \sum_{n=1}^N a[n] \cdot x_n[k] \right) \\ x_2[k+1] = x_1[k] \\ \vdots \\ x_N[k+1] = x_{N-1}[k] \end{cases} \quad (4.48)$$

Ecuția de ieșire corespunzătoare este:

$$y[k] = x_N[k] \quad (4.49)$$

4.2.2.4 Modele de simulare a sistemelor neliniare

Rezolvarea analitică a ecuațiilor neliniare este în general imposibilă, indiferent dacă este vorba despre sisteme de ecuații integro – diferențiale, specifice sistemelor analogice, sau despre sisteme de ecuații cu diferențe, cum întâlnim în cazul sistemelor discrete. Cu excepția unor cazuri particulare, în general având mică tangență cu aplicațiile reale, singura alternativă viabilă este simularea discretă. Aceasta implică limitarea analizei la studiul regimurilor tranzitorii, urmărite pe un interval finit de timp, pentru a limita la o valoare finită timpul de simulare.

Abordarea cea mai directă este cea corespunzătoare sistemelor dinamice în timp discret. În această situație, intervalul de timp între doi pași de simulare este constant, fiind fixat de perioada de tact ce coordonează funcționarea blocurilor discrete cu memorie (celule de întârziere sau memorare). Plecând de la forma cea mai generală a ecuațiilor de stare:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = g(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases} \quad (4.50)$$

și luând în considerare condițiile inițiale din care pleacă sistemul:

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \quad (4.51)$$

vectorul de stare poate fi calculat iterativ pe întreg intervalul de simulare, notat L , corespunzător lungimii regimului tranzitoriu studiat:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1] &= f(\mathbf{x}[0], e[0]) \\ \mathbf{x}[2] &= f(\mathbf{x}[1], e[1]) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}[L] &= f(\mathbf{x}[L-1], e[L-1]) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Odată rezolvată problema evoluției dinamice a stării, calculul semnalului de ieșire, $y[k]$, se rezumă la un simplu calcul algebric, dat de ecuația de ieșire din formula (4.50).

Cazul sistemelor analogice, impune asocierea la sistemul de simulat, a unui sistem discret, care să reproducă în mod cât mai precis dinamica prototipului analogic. Dacă, în cazul sistemelor liniare, există o metodă eficientă de estimare a pasului de simulare, în funcție de frecvența maximă a spectrului semnalului de intrare și a frecvențelor naturale ale sistemului studiat, pe baza teoremei eșantionării, nu același lucru se petrece la simularea sistemelor neliniare.

În continuare, luăm în considerare un sistem analogic, neliniar și neautonom, descris de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t), e(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), e(t)) \end{cases} \quad (4.53)$$

Prin eșantionarea semnalelor prezente în ecuații, cu un pas de eșantionare fix, h , implicând alegerea momentelor de timp t_k pentru poziționarea în timp a rezultatelor simulării, se obține aproximarea:

$$\mathbf{x}'(t_k) \cong \frac{1}{h} (\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)) \quad (4.54)$$

Unde diferența între două momente de timp succesive, $t_{k+1} - t_k$, este egală cu pasul de simulare, h . Prin înlocuire în ecuațiile de stare (4.53), se obțin relațiile:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), e(t)) \\ y(t_k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_k), e(t_k)) \end{cases} \quad (4.55)$$

Deoarece $t_k = k \cdot h$, utilizând notația $s(k \cdot h) = s[k]$ pentru orice semnal prezent în ecuația (4.55), rezultă sistemul de ecuații cu diferențe:

$$\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], e[k]) \\ y[k] = \mathbf{g}(\mathbf{x}[k], e[k]) \end{cases} \quad (4.56)$$

Acest sistem de ecuații de stare reprezintă caracterizarea standard pentru un sistem discret, având aceeași funcție de ieșire cu cea a sistemului analogic supus simulării, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, e)$, dar utilizând pentru tranziția stărilor, funcția algebrică, neliniară, cu valori vectoriale:

$$\mathbf{f}_d(\mathbf{x}, e) = \mathbf{x} + h \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, e) \quad (4.57)$$

Sistemul de ecuații de stare astfel rezultat, poate fi simulat utilizând metodologia expusă anterior pentru sisteme discrete, cuprinsă în ecuațiile (4.50 - 4.52). În acest mod s-a evidențiat o legătură strânsă între sistemele analogice și cele discrete. Mai departe, pe parcursul materialului, (par. 4.3.3) se va evidenția o altă conexiune între cele două clase de sisteme, prin intermediul secțiunii Poincare, mult mai profundă, chiar dacă are o aplicabilitate mai restrânsă. Metoda prezentată, ducând la algoritmul Euler cauzal, este o metodă cu pas fix, deosebit de simplă, dar care ajută la înțelegerea intuitivă a principiului simulării discrete a sistemelor neliniare analogice. Pentru creșterea performanțelor de simulare, s-a dezvoltat o multitudine de algoritmi mult mai complecși, majoritatea funcționând pe principiul pasului de simulare variabil dar care depășesc scopul acestei prezentări.

Din punctul de vedere al preciziei, o atenție deosebită trebuie acordată pasului de simulare, h . Dublul frecvenței maxime, f_{Max} , din spectrul semnalului de intrare, $e(t)$, reprezintă o sugestie și, în orice caz, o limită inferioară absolută a frecvenței corespunzătoare pasului de simulare, $f_s = 1/h$. Dacă se realizează o liniarizare locală a sistemului analogic neliniar, așa cum va fi expus în paragraful 4.3.2, frecvența naturală maximă a sistemului liniarizat poate oferi o altă sugestie privitoare la alegerea pasului de simulare. Dacă această frecvență naturală este mai mare decât f_{Max} , atunci frecvența de simulare, f_s , trebuie crescută corespunzător, $f_s > f_{Max}$, fără ca această precauție să fie o garanție absolută a preciziei de simulare. În general, datorită extinderii benzii de frecvență a semnalelor prin distorsionare neliniară, semnalele reprezentative funcționării sistemului analogic, (variabile de stare, semnale de ieșire) pot avea componente spectrale de amplitudine semnificativă, la frecvențe mai mari decât frecvența maximă, f_{Max} , din spectrul semnalului de intrare, $e(t)$. Implicit, acest lucru poate impune necesitatea creșterii semnificative a frecvenței de simulare, f_s , (scăderea valorii pasului de simulare, h) față de sugestiile oferite de teorema eșantionării și de frecvența naturală maximă a sistemului liniarizat, corespunzător sistemului neliniar supus simulării.

Dacă se dorește simularea sistemului pe un orizont temporal fixat ($T_{max} = ct.$), atunci scăderea pasului de simulare duce la mărirea timpului de simulare, până la valori prea mari spre a fi acceptate. În consecință, alegerea pasului de simulare este un proces iterativ, ce conduce la un compromis între precizia rezultatului obținut și timpul alocat simulării. Problematika preciziei de simulare este mai puțin critică în cazul sistemelor stabile dar poate duce la dificultăți majore în cazul sistemelor senzitive, cum ar fi cele haotice. Din această cauză, dezvoltarea de algoritmi de simulare a sistemelor analogice (de atașare a unui sistem discret prototipului analogic) este un domeniu de cercetare dificil, dar în continuă dezvoltare. Un studiu mai aprofundat alocat acestei probleme poate fi găsit, spre exemplu, în [2,3], unde se acordă o atenție deosebită influenței algoritmului asupra rezultatului simulării pentru comportări dinamice neliniare complexe.

4.3 Tipuri de comportări dinamice

4.3.1 Ierarhizarea complexității dinamice

Sistemele neliniare prezintă comportări dinamice variate, multe dintre acestea, cum ar fi dinamica haotică, nefiind nici măcar sugerate de dinamica liniară. Din punct de vedere al complexității dinamice, comportamentele sistemelor neliniare pot fi clasificate după cum urmează:

- comportamentul de tip constant,
- comportamentul de tip periodic,
- comportamentul de tip cuasiperiodic,
- comportamentul de tip haotic.

Comportamentul de tip constant este de departe cel mai întâlnit în aplicațiile practice: amplificatoarele și filtrele sunt doar două exemple de etaje cu largă utilizare și care au o dinamică de tip constant. Comportările cu o complexitate mai ridicată au și ele aplicații dintre cele mai variate.

Sistemele având o dinamică de tip periodic, sunt utilizate ca oscilatoare. Indiferent că este vorba despre oscilatoare cuasi-armonice sau de relaxare, ele se regăsesc în schemele generatoarelor de semnal, ale echipamentelor de comunicații și măsură, precum și în circuitele electronice de putere. Cu cât circuitul oscilator conține elemente cu caracteristici neliniare mai puțin netede, cu atât se fac simțite mai puternic componentele spectrale plasate la multiplii frecvenței fundamentale de oscilație, denumite armonici. În cazul circuitelor ne – autonome, unde frecvența fundamentală a semnalului de intrare poate fi luată drept referință, pot apărea și sub-armonici. Exemplul cel mai evident este circuitul basculant bistabil de tip T. Din semnalul de tact aplicat la intrare, acesta formează un semnal de ieșire de perioada dublă, deci frecvență fundamentală jumătate din cea a semnalului de intrare.

Atunci când, în spectrul semnalelor de ieșire, sau al variabilelor de stare, ale unui sistem neliniar, apar componente spectrale ne – corelate armonic (raportul frecvențelor componentelor spectrale nu este un număr rațional), în domeniul timp

semnalele corespunzătoare sunt ne-periodice. Acest tip de dinamică poartă numele cuasi – periodic și este uzual întâlnită în echipamentele de comunicații și de măsură, generând semnale modulate, fără sincronizarea semnalului purtător cu cel modulator.

Cel mai exotic tip de comportare dinamică, întâlnit în sistemele neliniare, este cel haotic. Sistemele haotice generează semnale ne – periodice, dar ale căror spectre sunt continui și au alura unor perturbații aleatoare. Sistemele haotice sunt sensibile la condițiile inițiale, la micile variații ale parametrilor și la perturbații externe, nefiind predictibile pe termen lung. Astfel de sisteme se întâlnesc în multe aplicații din viața reală, fiind modele pentru fenomene meteorologice, chimice, mecanice sau electrice, dar și biologice, cum ar fi evoluția în timp a populațiilor speciilor prădătoare și pradă, sociale, cum ar fi evoluția demografică, sau economice, de exemplu evoluția cotațiilor bursiere. Aplicarea inginerescă a acestei categorii de sisteme neliniare nu s-a extins prea mult, în pofida unor studii detaliate realizate în ultimele zeci de ani. Câteva exemple de aplicații ale sistemelor haotice vor fi analizate în capitolul ce urmează.

Aceste tipuri de comportări dinamice vor fi trecute doar în revistă în paragrafele ce urmează, accentul căzând în special pe exemple și aplicații și mai puțin pe aspectele de rigoare matematică.

4.3.2 Dinamica de tip constant

Se spune că un sistem neliniar, fie el analogic sau discret, are o dinamică de tip constant, dacă, există cel puțin un set de valori ale variabilelor de stare care, odată atinse, tind să rămână nemodificate. Analitic se poate scrie, pentru sisteme analogice:

$$\exists \mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^N : \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*, \forall t > 0 \quad (4.58)$$

Pentru sisteme discrete, condiția este similară:

$$\exists \mathbf{x}^* \in \mathfrak{R}^N : \mathbf{x}[0] = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^*, \forall k > 0 \quad (4.59)$$

Vectorii de stare care îndeplinesc una dintre aceste condiții poartă numele de *puncte de echilibru*, pentru sisteme analogice, respectiv *puncte fixe* pentru sisteme discrete.

4.3.2.1 Puncte de echilibru

Pornind de la condiția de constanță a vectorului de stare, (4.58), putem obține o condiție algebrică de determinare a punctelor de echilibru:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*, \forall t > 0 \Rightarrow \mathbf{x}'(t) = 0, \forall t > 0 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0, \forall t > 0 \quad (4.60)$$

Având în vedere caracterul algebric (fără memorie) al relației obținute, dependența de timp a vectorului de stare, $\mathbf{x}(t)$, este irelevantă. În consecință, putem spune că punctul de echilibru, \mathbf{x}^* , este soluția ecuației algebrice:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.61)$$

În particular, pentru sistemele liniare autonome, avem o descriere prin ecuații de stare de forma:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (4.62)$$

Tinând cont de rezultatele (4.61) și (4.62), obținem, pentru sisteme analogice liniare ecuația:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (4.63)$$

În cazul în care matricea de tranziție a stărilor, \mathbf{A} , este nesingulară, situație întâlnită în majoritatea aplicațiilor practice, rezultă o singură soluție pentru ecuația particulară (4.63), și anume originea spațiului stărilor:

$$\mathbf{x}^* = 0 \quad (4.64)$$

Spre deosebire de cazul liniar, ecuația neliniară, (4.61), poate avea o soluție, în general nenulă, mai multe soluții, sau nici una, în funcție de forma particulară a funcției de tranziție a stărilor. Comportarea sistemului neliniar, în apropierea unui punct de echilibru, poate fi diferită, în funcție de sistem, dar și de punctul de

echilibru ales. Vectorul de stare se poate apropia în timp de punctul de echilibru, situație în care acesta poartă numele de atractor, sau punct de echilibru stabil, poate fi respins de punctul de echilibru, fiind considerat instabil, sau repulsor, sau poate avea o comportare neutră. Existența acestor comportări diferite, impun un studiu al stabilității, discutat în paragraful 4.3.2.4.

4.3.2.2 Puncte fixe

Pornind de la condiția de constanță a vectorului de stare, (4.59), putem obține o condiție algebrică de determinare a punctelor fixe:

$$\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{x}[k], \quad \forall k > 0 \quad (4.65)$$

Având în vedere caracterul algebric (fără memorie) al relației obținute, dependența de timp a vectorului de stare, $\mathbf{x}[k]$, este irelevantă. În consecință, putem spune că punctul fix al sistemului discret, neliniar analizat, \mathbf{x}^* , este soluția ecuației algebrice de punct fix:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (4.66)$$

Observație: Se remarcă similitudinea ecuației algebrice (4.66) cu cea întâlnită la problemele matematice denumite "de punct fix". Soluționarea acestor probleme se realizează prin alegerea unei estimări inițiale a soluției \mathbf{x}_0 , suficient de apropiată de valoarea așteptată a soluției, \mathbf{x}^* , urmată de iterarea (denumită "a aproximărilor succesive") $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$ perfect similară ecuațiilor de stare a sistemului discret analizat. O astfel de problemă, de punct fix, poate fi soluționată prin metoda expusă dacă funcția neliniară, $\mathbf{f}(\cdot)$, are proprietăți convenabile, care asigură convergența șirului de iterații spre valoarea finală finită, \mathbf{x}^* . Îndeplinirea condițiilor de soluționare a problemei de punct fix, semnifică, din punct de vedere sistemic, stabilitatea punctului fix al sistemului discret, neliniar analizat. În caz contrar, șirul iterațiilor diverge, semnificând instabilitatea punctului fix al sistemului discret. Aceste aspecte, aferente atractivității sau repulsivității punctelor fixe, vor fi analizate în paragraful următor.

În particular, pentru sistemele discrete, liniare și autonome, avem o descriere prin ecuații de stare de forma:

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] \quad (4.67)$$

Tinând cont de rezultatele (4.65) și (4.66), obținem, pentru sisteme discrete, liniare ecuația de determinare a punctelor fixe:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (4.68)$$

Atunci când matricea $\mathbf{A} - \mathbf{I}$, este nesingulară, situație des întâlnită în aplicațiile ingineresti, rezultă o singură soluție pentru ecuația particulară (4.68), și anume originea spațiului stărilor:

$$\mathbf{x}^* = 0 \quad (4.69)$$

Spre deosebire de cazul liniar, ecuația neliniară, (4.66), poate avea o soluție, mai multe soluții, sau nici una, în funcție de forma particulară a funcției de tranziție a stărilor. De asemenea, soluțiile ecuației neliniare, atunci când există, pot fi diferite de zero.

4.3.2.3 Atractivitate și repulsivitate

Punctele de echilibru ale sistemelor analogice pot fi stabile (atractoare) sau instabile (repulsoare). Următoarele definiții evidențiază diversele variante de stabilitate (spre deosebire de unicul tip de stabilitate – MI – ME – pentru sisteme liniare).

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in V(\mathbf{x}^*) \quad \forall t \geq 0 \quad (4.70)$$

punctul de echilibru se numește simplu (sau neutru) stabil.

În caz contrar, punctul de echilibru este instabil.

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad (4.71)$$

punctul de echilibru se numește asimptotic stabil.

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\exists a, A \geq 0, \forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in V(\mathbf{x}^*) \forall t \geq 0 \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq A \cdot e^{-at} \quad (4.72)$$

punctul de echilibru se numește exponențial asimptotic stabil.

În mod similar se poate defini stabilitatea punctelor fixe pentru sisteme discrete.

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}[k] \in V(\mathbf{x}^*) \quad \forall k \geq 0 \quad (4.73)$$

punctul fix se numește simplu (sau neutru) stabil.

În caz contrar, punctul fix este instabil.

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^* \quad (4.74)$$

punctul fix se numește asimptotic stabil.

Definiție Dacă există o vecinătate $V(\mathbf{x}^*)$ astfel încât:

$$\exists a, A \geq 0, \forall \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}[0] \in V(\mathbf{x}^*) \forall k \geq 0 \quad \|\mathbf{x}[k] - \mathbf{x}^*\| \leq A \cdot e^{-ak} \quad (4.75)$$

punctul de echilibru se numește exponențial asimptotic stabil.

4.3.2.4 Studiul stabilității prin liniarizare locală

Stabilitatea dinamicilor de tip constant, denumită și atractivitatea punctelor de echilibru sau a punctelor fixe, nu are abordări generale și globale.

Liniarizarea locală se bazează pe un principiu algebric. Tinând cont că, în ecuațiile de stare, neliniaritatea dinamicii interne a sistemului se evidențiază numai prin funcția de tranziție a stărilor, se caută liniarizarea acesteia, într-o vecinătate îngustă în jurul unui punct caracteristic al dinamicii constante din spațiul stărilor. Pornim de la dezvoltarea în serie de puteri (Taylor) a funcției de tranziție a stărilor:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^n}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.76)$$

Din totalitatea termenilor dezvoltării diferenței:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2!} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots \quad (4.77)$$

reținem numai termenul de gradul întâi, dominant într-o vecinătate restransă a punctului \mathbf{x}^* .

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \approx \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \quad (4.78)$$

Pentru a realiza liniarizarea sistemului neliniar, adoptăm notațiile:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1; \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}); \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A} \quad (4.79)$$

Făcând înlocuirile în relația (4.77), obținem liniarizarea funcției de tranziție a stărilor în jurul punctului \mathbf{x}^* .

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) \approx \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (4.80)$$

Această formă de scriere ne va permite liniarizarea ecuațiilor de stare atât pentru sisteme analogice cât și pentru sisteme în timp discret.

În relațiile anterioare, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ notează Jacobianul funcției vectoriale, N

- dimensionale, \mathbf{f} , în raport cu argumentul vectorial, N - dimensional, \mathbf{x} :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Rezultatul este o funcție de vectorul \mathbf{x} . Prin înlocuirea argumentului cu constanta \mathbf{x}^* , se obține matricea constantă \mathbf{A} .

În cazul analogic, sistemului neliniar, autonom, $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, i se atașează, prin metoda expusă anterior, sistemul liniarizat în jurul punctului de echilibru \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (4.82)$$

Stabilitatea acestuia din urmă este ușor de estimat, pe baza poziției valorilor proprii ale matricii de tranziție a stării \mathbf{A} . Acestea sunt rădăcinile ecuației polinomiale de grad N :

$$\det(s \cdot \mathbf{I}_N - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow s \in \{s_n\}_{n=1, \dots, N} \subset \mathbf{C} \quad (4.83)$$

Dacă toate valorile proprii ale matricii de tranziție a stării \mathbf{A} sunt poziționate strict în semiplanul stâng al planului complex ($\text{Re}(s) < 0$), atunci punctul de echilibru din originea spațiului stărilor sistemului liniar este stabil (atractor). Dacă măcar una dintre aceste valori proprii este situată în semiplanul drept al planului complex ($\text{Re}(s) > 0$), atunci sistemul liniar este instabil. Poziția limită intermediară ($\text{Re}(s) = 0$) este denumită limită de stabilitate, numai dacă există valori proprii simple pe axa imaginară a planului complex, toate celelalte fiind poziționate strict în semiplanul stâng al planului complex ($\text{Re}(s) < 0$).

Legătura cu atractivitatea punctului de echilibru al sistemului neliniar, este oferită de următorul rezultat:

Teoremă Dacă sistemul liniarizat, în jurul punctului de echilibru, \mathbf{x}^* , este strict stabil, punctul de echilibru, \mathbf{x}^* , este atractor. Dacă sistemul liniarizat în jurul punctului de echilibru, \mathbf{x}^* , este strict instabil, punctul de echilibru, \mathbf{x}^* , este repulsor. Cazul limitei de stabilitate este indecidabil.

În cazul discret, sistemului neliniar, autonom:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \quad (4.84)$$

i se atașează, prin metoda similară sistemelor analogice, sistemul liniarizat: în jurul punctului fix \mathbf{x}^* :

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}[k] \quad (4.85)$$

Stabilitatea sistemului liniarizat este ușor de estimat, pe baza poziției valorilor proprii ale matricii de tranziție a stării, \mathbf{A} :

$$\det(z \cdot \mathbf{I}_N - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow z \in \{z_n\}_{n=1, \dots, N} \subset \mathbf{C} \quad (4.86)$$

Dacă toate valorile proprii ale matricii de tranziție a stării, \mathbf{A} , sunt poziționate strict în interiorul cercului unitar al planului complex ($|z| < 1$), atunci punctul de echilibru din originea spațiului stărilor sistemului liniar este stabil (atractor). Dacă măcar una dintre aceste valori proprii este situată în exteriorul cercului unitar al planului complex ($|z| > 1$), atunci sistemul liniar este strict instabil. Poziția limită intermediară ($|z| = 1$) este denumită limită de stabilitate, numai dacă există valori proprii simple pe cercul unitar, toate celelalte fiind poziționate strict în interiorul cercului unitar al planului complex ($|z| < 1$).

Legatura cu atractivitatea punctului de echilibru al sistemului neliniar, este oferită de următorul rezultat:

Teoremă Dacă sistemul discret, liniarizat în jurul punctului fix, \mathbf{x}^* este strict stabil, punctul de echilibru \mathbf{x}^* este atractor. Dacă sistemul liniarizat în jurul punctului de echilibru \mathbf{x}^* este strict instabil, punctul de echilibru \mathbf{x}^* este repulsor. Cazul limitei de stabilitate este indecidabil.

4.3.2.5 Abordarea Liapunov

Studiul atractivității punctelor de echilibru și a punctelor fixe pe baza liniarizării locale este deosebit de eficientă datorită abordării frecvențiale, care oferă soluții algebrice la problema stabilității. Totuși această metodă este limitată în determinarea comportării dinamice de semnal mare, fiind o metodă locală. În acest sens, studiul bazat pe funcția Liapunov permite extinderea analizei privind atractivitatea punctelor fixe și de echilibru la domenii mai largi ale vectorilor de stare.

Definiție Sistemului autonom $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, având un punct de echilibru în vectorul fixat \mathbf{x}^* , i se atașează funcționala $V: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$. Dacă aceasta respectă condițiile:

$$\bullet \quad V(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.87)$$

$$\bullet \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}^*} \subseteq \mathfrak{R}^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* : V(\mathbf{x}) > 0 \quad (4.88)$$

$$\bullet \quad \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) < 0: \quad \forall t > 0 \quad (4.89)$$

atunci funcționala $V(\cdot)$ se numește funcție Liapunov atașată sistemului inițial.

Definiție Sistemului autonom $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k])$, având un punct fix în vectorul \mathbf{x}^* , i se atașează funcționala $V: \mathfrak{R}^N \rightarrow \mathfrak{R}$. Dacă aceasta respectă condițiile:

$$\bullet \quad V(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (4.90)$$

$$\bullet \quad \forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}^*} \subseteq \mathfrak{R}^N, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^* : V(\mathbf{x}) > 0 \quad (4.91)$$

$$\bullet \quad V(\mathbf{x}[k+1]) < V(\mathbf{x}[k]): \quad \forall k \in N \quad (4.92)$$

atunci funcționala $V(\cdot)$ se numește funcție Liapunov atașată sistemului inițial.

Rezultatul fundamental legat de atractivitatea punctelor de echilibru sau fixe ale sistemelor neliniare, analogice sau discrete, este dat de teorema Liapunov:

Teoremă: Dacă unui punct fix sau de echilibru al unui sistem neliniar, analogic sau discret, i se poate atașa o funcție Liapunov, atunci punctul corespunzător are caracter atractor.

În condițiile în care funcționala $V(\mathbf{x})$ respectă condițiile de funcție Liapunov, hipersuprafața definită de $V(\mathbf{x})$ în spațiul \mathfrak{R}^{N+1} este asemănătoare unui hiperparaboloid, definind o funcție interpretabilă, cel puțin într-o vecinătate suficient de restrânsă a punctului de echilibru \mathbf{x}^* , ca o mărime de tip energetic.

Pentru a înțelege mai profund această afirmație și a face o legătură între metoda Liapunov și liniarizarea locală, este util să studiem cazul particular al sistemelor liniare. Într-o vecinătate suficient de restrânsă în jurul punctului definind dinamica de tip constant, sistemul neliniar autonom studiat poate fi aproximat prin sistemul liniar:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (4.93)$$

Acesta are unicul punct de echilibru în origine, datorită translației spațiului stărilor asigurată de liniarizarea în semnal mic. Pentru acest punct de echilibru al sistemului liniar, putem defini funcționala patrată:

$$V(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad (4.94)$$

Evident, $V(0) = 0$. Dacă matricea de tranziție a stărilor, \mathbf{A} , are numai valori proprii cu partea reală negativă, atunci forma patrată definită de această matrice prin relația funcționalei $V(\mathbf{x})$ este pozitiv definită. În consecință, $V(\mathbf{x}) > 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$. Ultima condiție pentru corecta definire a unei funcții Liapunov, se poate verifica prin calcul direct:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V^T}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} \quad (4.95)$$

unde matricea: $\mathbf{M} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ are valorile proprii:

$$v_n = -\lambda_n \cdot \lambda_n^* = -(\operatorname{Re}(\lambda_n))^2 - (\operatorname{Im}(\lambda_n))^2 < 0 \quad (4.96)$$

În consecință, matricea \mathbf{M} este nucleul unei forme pătratice negativ definite, $\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) < 0$ pentru orice $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

Astfel se verifică faptul că, pentru orice sistem liniar stabil, forma patrată $V(\mathbf{x})$, putând avea interpretare energetică, verifică cele trei condiții pentru a fi o funcție Liapunov atașată acestui sistem și punctului său de echilibru $\mathbf{x}^* = 0$.

Din punctul de vedere al interpretării geometrice, putem spune că, într-o vecinătate suficient de restrânsă a punctului de echilibru \mathbf{x}^* , paraboloidul definit de forma patrată $V(\mathbf{x})$, aproximează funcția Liapunov a sistemului neliniar autonom, în același mod în care, într-o vecinătate similară, funcția neliniară de tranziție a stărilor este aproximabilă printr-una liniară.

Ca o consecință a acestei analize, putem să construim o clasă largă de sisteme neliniare, utilă în aplicațiile practice, pe care o întâlnim sub denumirea de **sisteme de tip gradient**.

Să presupunem că, într-un spațiu vectorial finit dimensional, avem de rezolvat o problemă de optimizare, fără constângeri, de tipul:

$$\min V(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N \quad (4.97)$$

unde funcția de cost, $V(\mathbf{x})$, este o funcțională concavă, având un minim absolut în punctul de optim căutat, \mathbf{x}^* . Atunci putem privi această funcțională ca pe funcția Liapunov a unui sistem având un punct de echilibru în \mathbf{x}^* , optimumul problemei de optimizare ce trebuie rezolvată. Acest punct de echilibru fiind stabil, conform primei teoreme a lui Liapunov, sistemul neliniar astfel proiectat, va evolua în timp spre punctul de optim căutat. Ideea este de a interpreta gradientul funcționalei de tip Liapunov, $\partial V / \partial \mathbf{x}$, ca direcție de creștere a funcției de cost supusă minimizării. În consecință, direcția de evoluție a traiectoriei sistemului trebuie luată în sens opus:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mu \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.98)$$

de unde și denumirea de sistem gradient pentru sistemul neliniar ce rezolvă problema de optimizare propusă. Constanta μ , introdusă în sistemul ecuațiilor de stare, ne permite să adaptăm viteza de evoluție a sistemului la condițiile specifice problemei ingineresti care a generat problema de optimizare de la care am plecat.

Analizând stabilitatea punctului de echilibru \mathbf{x}^* , identic punctului de optim căutat, prin metoda Liapunov, obținem:

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mu \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = -\mu \cdot \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^2 < 0 \quad \forall \mu > 0 \quad (4.99)$$

Ceea ce rezolvă cea mai dificilă condiție de funcție Liapunov, cea de a treia. Concavitățile funcției de cost asigură a doua condiție, iar, dacă valoarea acesteia în

punctul de optim este diferită de zero, adăugarea unei constante potrivit alese duce la îndeplinirea primei condiții Liapunov.

4.3.3 Dinamica de tip periodic

4.3.3.1 Cicluri limită

Comportarea dinamică de tip periodic reprezintă nivelul imediat următor de complexitate, după cea de tip constant. Incluse în categoria dinamică a oscilațiilor neliniare, comportamentele dinamice periodice sunt caracterizate în spațiul stărilor prin mulțimi invariante de tip curbă simplă închisă, denumite cicluri limită. Pentru a se putea obține astfel de comportări dinamice, fără ca traiectoria să se auto-intersecteze transvers [1], sistemele analogice trebuie să aibă ordinul strict mai mare decât unu; pentru sistemele în timp discret nu se impun limitări asupra ordinului.

Pentru sistemul autonom, analogic, de ordinul N , descris de ecuațiile de stare:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.100)$$

putem defini ciclul limită ce descrie dinamica periodică după cum urmează:

Definiție: Un ciclu limită este o curbă închisă simplă $(C) \in \mathfrak{R}^N$ parcursă de vectorul de stare al sistemului (4.92) conform condițiilor:

1. dacă ciclul limită conține condiția inițială, atunci traiectoria sistemului nu părăsește ciclul limită:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in (C) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in (C) \quad \forall t > 0 \quad (4.101)$$

2. există un interval de timp, numit perioadă fundamentală, reprezentând cel mai scurt interval de timp pentru care valorile vectorului de stare se repetă periodic:

$$\exists T : \forall t > 0 : \mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \quad (4.102)$$

În condițiile definiției, variabilele de stare $(x_n, n = 1, \dots, N)$ sunt semnale periodice, toate având aceeași perioadă fundamentală, T . A doua condiție din

definiție este esențială, nu numai pentru că precizează perioada fundamentală T a sistemului, ci mai ales pentru că specifică modul de parcurgere al ciclului, (C) ; fără această condiție, s-ar putea imagina sisteme neliniare care să parcurgă curba, (C) , în mod aperiodic, apropiindu-se asimptotic de punctul de plecare, dar fără a-l atinge într-un timp finit. Prima condiție din definiție specifică faptul că ciclul limită, (C) , este o mulțime invariantă a sistemului analizat, iar, prin faptul că (C) este o curbă simplă, evidențiază faptul că traiectoria sistemului nu se poate intersecta cu ea însăși în mod transvers. Nici una dintre condiții nu precizează nimic despre atractivitatea ciclului limită. Într-adevăr, pe parcursul studiului, vom întâlni atât cicluri limită atrătoare cât și repulsoare.

Un exemplu elementar de sistem putând prezenta comportare periodică este reprezentat de sistemul Van der Pol, descris de ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases} \quad (4.103)$$

Primul termen din fiecare ecuație diferențială de ordinul I, este similar termenului corespunzător din ecuațiile oscilatorului armonic liniar:

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases} \quad (4.104)$$

Acest sistem poate fi implementat pe baza structurii cu reacție, conținând două integroare cuplate în inel, pentru realizarea unui oscilator în cuadratură, ca în schema cuprinsă în figura 4.6:

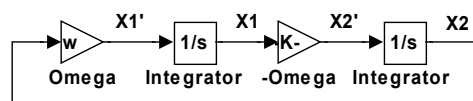


Fig. 4.6 Schema bloc a oscilatorului liniar în inel

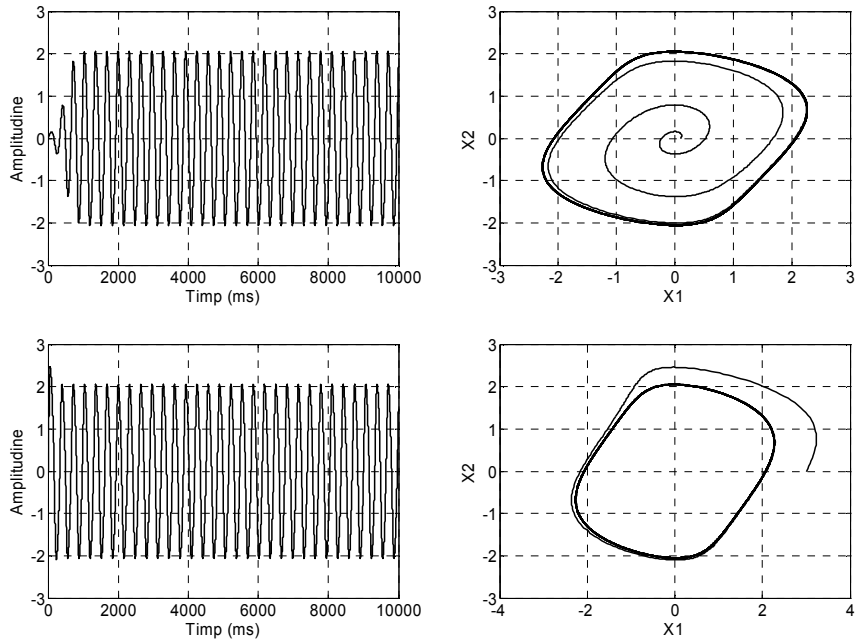


Fig. 4.7 Rezultatele simulărilor pentru un sistem Van der Pol; evoluția temporală a variabilei de stare x_1 (stânga) și portretul de fază (dreapta) pentru condiție inițială în interiorul ciclului limită (sus) sau în exterior (jos)

Al doilea termen din prima ecuație este responsabil de limitarea amplitudinii de oscilație, cu distorsionarea corespunzătoare a variabilelor de stare, ca în graficele prezentate în figura 4.7. Rezultatele simulărilor din cele patru grafice au fost realizate pentru un sistem având parametrii: $\omega_0 = 2$ rad/sec și $a = 1$.

Pentru sistemul autonom, discret, de ordinul N , descris de ecuațiile de stare:

$$\mathbf{x}[k + 1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \quad (4.105)$$

putem defini ciclul limită ce descrie dinamica periodică:

Definiție: Un ciclu limită discret este o mulțime finită de vectori $(C) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_L\} \in \mathfrak{R}^N$ parcursă de vectorul de stare al sistemului (4.105) conform condițiilor:

1. dacă ciclul limită conține condiția inițială, atunci traiectoria sistemului nu părăsește ciclul limită pe semi-axa pozitivă a timpului

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0 \in (C) \Rightarrow \mathbf{x}[k] \in (C) \quad \forall k > 0 \quad (4.106)$$

2. perioada fundamentală a sistemului discret este egală cu numărul de vectori din compunerea ciclului limită și reprezintă cel mai scurt interval de timp pentru care vectorul de stare se repetă periodic:

$$\exists L : \forall k > 0 : \mathbf{x}[k + L] = \mathbf{x}[k] \quad (4.107)$$

Ca și în situația sistemelor analogice, variabilele de stare (x_n , $n = 1, \dots, N$) sunt semnale periodice, toate având aceeași perioadă fundamentală, L . Și în cazul discret, vom întâlni atât cicluri limită atrătoare cât și repulsoare.

Spre deosebire de cazul ciclurilor limită analogice, deosebit de greu de identificat, în general chiar imposibil de determinat analitic, ciclurile limită discrete pot fi determinate analitic, printr-un proces iterativ.

Să presupunem că avem condiția inițială, $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$, aparținând ciclului limită (C). Atunci condiția de periodicitate, cu perioada L , impune:

$$\mathbf{x}[k + L] = \mathbf{x}[k] \quad (4.108)$$

Dar, ținând cont de relația analitică a ecuațiilor de stare, (4.105) ale sistemului discret analizat, membrul stâng al relației (4.108) poate fi detaliat în forma:

$$\mathbf{x}[k + L] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k + L - 1]) = \dots = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \dots \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}[k]) \quad (4.109)$$

În care, compunerea funcțională, 'o', se realizează de $L - 1$ ori. Notând $\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \dots \circ \mathbf{f}(\mathbf{x})$ și luând în considerație condiția (4.108), putem trage concluzia:

$$\mathbf{f}_L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (4.110)$$

Această ecuație algebrică este similară ecuației de punct fix, cu diferența că este aplicată funcției neliniare $\mathbf{f}_L(\mathbf{x})$, și nu funcției de tranziție a stărilor. Prin rezolvarea acestei ecuații, putem determina un punct din ciclul limită, (C). Pentru determinarea celorlalte puncte în ordinea corectă de parcurgere, aplicăm ecuațiile de stare, (4.108) de $L - 1$ ori.

Evident, determinarea ciclurilor limită prin metoda descrisă nu numai că permite calculul valorilor vectorilor din toate secvențele de lungime L , dar, pentru corecta identificare a punctelor de pe ciclurile limită, metoda trebuie aplicată iterativ, de la puncte fixe la cicluri limită de lungimi succesive: $L = 2, 3, \dots, L_{\text{Max}}$, putându-se identifica doar un număr finit de lungimi de cicluri limită, L_{Max} . De asemenea metoda nu răspunde la problema generală: "există, pentru un sistem dat oarecare, vreun ciclu limită?" și nici la problema practică: "există o lungime maximă pentru ciclurile limită ale sistemului studiat?". Cu toate aceste limitări, metoda este utilă în multe situații practice și poate fi aplicată relativ ușor utilizând un procesor de calcul simbolic.

4.3.3.2 Atractivitatea ciclurilor limită; secțiunea Poincare

La fel ca și punctele fixe sau de echilibru, mulțimile limită de tip ciclu pot fi atrătoare sau repulsoare.

Definiție: Un ciclu limită (C) , al unui sistem dinamic neliniar autonom, analogic sau discret, se numește atractor dacă are o vecinătate D_C , incluzând (C) , astfel încât, alegând orice punct, $x_0 \in D_C$, drept condiție inițială a sistemului, traiectoria acestuia se apropie asimptotic de ciclul limită (C) . În caz contrar, ciclul limită se numește repulsor.

În cazul analogic, condiția de atractivitate pentru ciclul limită, (C) , al sistemului descris de ecuațiile de stare autonome (4.100), revine la:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t), (C)) = 0 \quad (4.111)$$

unde, distanța, $d(\cdot)$, între un punct oarecare $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ și curba închisă (C) se definește ca infimumul distanțelor la toate punctele curbei:

$$d(\mathbf{x}(t), (C)) = \inf_{\mathbf{y} \in (C)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (4.112)$$

iar norma este cea Euclidiană:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2} \quad (4.113)$$

În cazul sistemelor discrete, condiția de atractivitate pentru ciclul limită (C), al sistemului autonom studiat, este varianta discretă a relației (4.104):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}[k], (C)) = 0 \quad (4.114)$$

Diferența esențială intervine în alegerea metricii, $d(\cdot)$, datorită numărului finit de puncte din mulțimea (C):

$$d(\mathbf{x}(t), (C)) = \min_{\mathbf{y} \in (C)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (4.115)$$

Cea mai simplă variantă de studiu a atractivității ciclurilor limită este cea corespunzătoare sistemelor discrete, datorită numărului finit de puncte cuprinse într-un ciclu limită discret. În aceste condiții se poate face un calcul similar liniarizării locale; singura diferență față de studiul stabilității punctelor fixe constă în necesitatea repetării calculelor pentru fiecare vector \mathbf{x}_m aparținând ciclului limită (C), $m = 1, \dots, L$. Algoritmul de calcul conține etapele:

Pentru fiecare vector $\mathbf{x}_m \in (C)$, $m = 1, \dots, L$

- Se constăruiește sistemul liniarizat în jurul punctului \mathbf{x}_m , calculându-se matricea sa de tranziție a stărilor $\mathbf{A}_m = \mathbf{J}(\mathbf{x}_m)$;
- Se calculează valorile proprii ale acestei matrici, $\lambda_{n,m}$; $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, L$

În final [3], se calculează valorile medii logaritmice ale modulelor fiecărui șir de valori proprii, de-a lungul ciclului limită:

$$M_n = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L \log |\lambda_{n,m}| = \log \sqrt[L]{\prod_{m=1}^L |\lambda_{n,m}|}, \quad n = 1, \dots, N \quad (4.116)$$

Decizia privitoare la atractivitatea ciclului limită se ia în funcție de semnul multiplicatorilor caracteristici astfel rezultați. Dacă toți multiplicatorii sunt

negativi, ciclul limită este atractor; un singur multiplicator pozitiv semnifică repulsivitatea ciclului limită.

Pentru studiul atractivității ciclurilor limită ale sistemelor analogice, se poate încerca o metodă reduționistă: atașarea unui sistem discret, cu comportare similară, celui analogic studiat. Metoda eșantionării fine, prezentată în paragraful 4.2.2.4, ca legătură între sistemele analogice și cele discrete, nu este adecvată studiului atractivității ciclurilor limită, deoarece sistemul discret atașat prototipului analogic depinde de o mărime subiectivă, pasul de eșantionare, h .

O metodă, prin care sistemul discret rezultat este structural legat de prototipul analogic supus studiului, este dată de *secțiunea Poincare*. Ideea este de a alege momentele de eșantionare atunci când traiectoria sistemului analogic intersectează o hiper-suprafață, aleasă inițial, în spațiul stărilor, \mathcal{X}^N . Momentele de eșantionare nu mai sunt obligatoriu echidistante, dar acesta este un preț relativ mic plătit pentru obținerea unui rezultat obiectiv, dependent numai de dinamica sistemului studiat și de geometria traiectoriei sale. În urma aplicării metodei secțiunii Poincare, sistemului analogic de ordinul N , i se atașează un sistem discret de ordin $N - 1$. În plus față de aceste simplificări structurale, dacă sistemul analogic are o comportare periodică, sistemul Poincare este mai simplu și din punctul de vedere al complexității dinamice: unui ciclu limită analogic îi corespunde un punct fix discret, situat la intersecția între curba închisă ce descrie oscilația neliniară analogică și hiper-suprafața ce definește secțiunea Poincare. Studiul atractivității ciclului limită analogic se conduce după rezultatul:

Teoremă: ciclul limită analogic este atractor dacă și numai dacă punctul fix discret, corespunzător prin secțiunea Poincare, este stabil. În caz contrar, cele două mulțimi limită sunt simultan repulsoare.

În mod uzual, pentru simplitate, hiper-suprafața se alege un hiper-plan, datorită ecuațiilor liniare care îi descriu geometria:

$$\sum_{n=1}^N a_n \cdot x_n = c \quad (4.117)$$

Determinarea secțiunii Poincare, revine la rezolvarea sistemului diferențial-algebric compus din ecuația (hiper-) planului (4.117) și ecuațiile de stare ale sistemului (4.100). În general, rezolvarea acestei probleme este imposibilă analitic. De aceea, cea mai întâlnită metodă este cea de simulare numerică.

Se poate urmări semnificația geometrică și modul de aplicare a metodei secțiunii Poincare pe cazurile particulare ale unor oscilatoare de ordin $N = 2$. Oscilatorul Van der Pol, studiat în sub-paragraful anterior, este descris de ecuațiile de stare (4.98):

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases} \quad (4.118)$$

Amplificarea, a , controlează simultan viteza de atingere a regimului permanent și puritatea spectrală a variabilelor de stare. O valoare mică duce la un timp mai mare de atingere a regimului permanent, dar și la un nivel mai scăzut al armonicilor din spectrul variabilelor de stare. Creșterea valorii acestei amplificări scurtează regimul tranzitoriu, marind însă distorsiunile neliniare ale semnalelor $x_1(t)$ și $x_2(t)$.

În figura 4.8, se prezintă un set de rezultate de simulare, evidențiind o viteză relativ redusă de atingere a regimului permanent, datorită valorii mici a amplificării ($a = 0,1$). Și forma de undă în domeniul timp și portretul de fază, evidențiază o puritate spectrală bună. În reprezentarea grafică a portretului de fază, este specificat, cu linie groasă, semidreapta definind secțiunea Poincare. Corespunzător, în cel de-al treilea grafic, apar eșantioanele variabilei de stare a sistemului discret, care evoluează spre punctul fix, stabil, dictat de amplitudinea de oscilație a variabilei analogice x_2 .

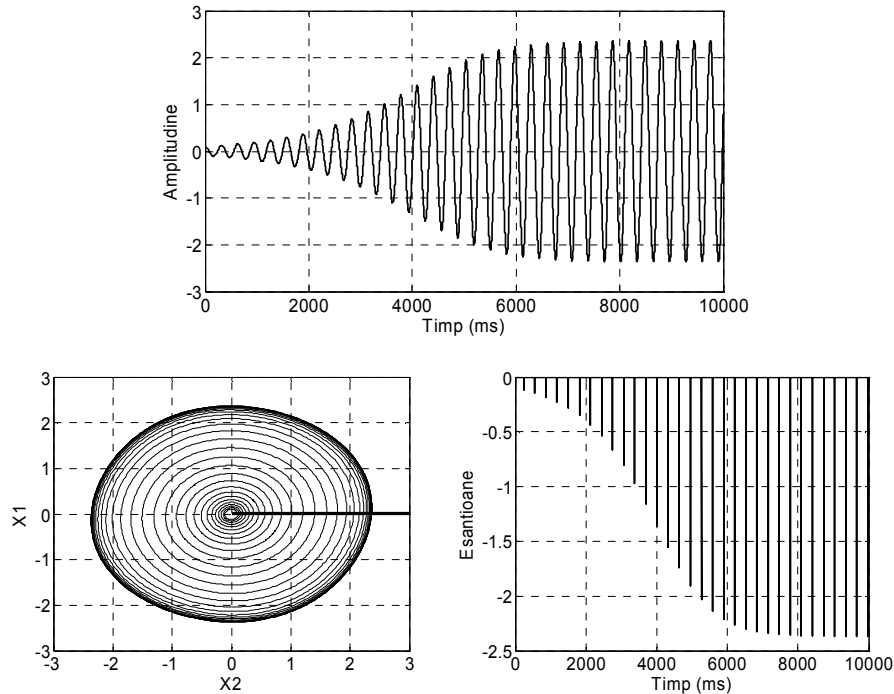


Fig. 4.8 Evoluția temporală pentru variabila de stare x_2 (sus), portretul de fază, cu reprezentarea semidreptei de secționare (stânga) și eșantioanele variabilei de stare a sistemului Poincare (dreapta) pentru un sistem Van der Pol cu $a = 0,1$

Pentru o valoare mult mai mare a amplificării, $a = 1$, se obțin rezultatele din figura 4.9, evidențiind tot o comportare dinamică periodică atrătoare, dar cu un regim tranzitoriu mai scurt, implicit distorsiuni mai mari.

Pentru a obține un compromis mai bun între timpul de răspuns și puritatea spectrală, poate fi utilizat un oscilator mai complicat, de tip cuasi-armonic, pentru care se obțin rezultatele din figura 4.18. Îmbunătățirea comportării oscilatorului cuasi-armonic, se obține modificând termenul neliniar din ecuațiile oscilatorului Van der Pol, pentru a lua în calcul ambele variabile de stare, ca în ecuațiile (4.119).

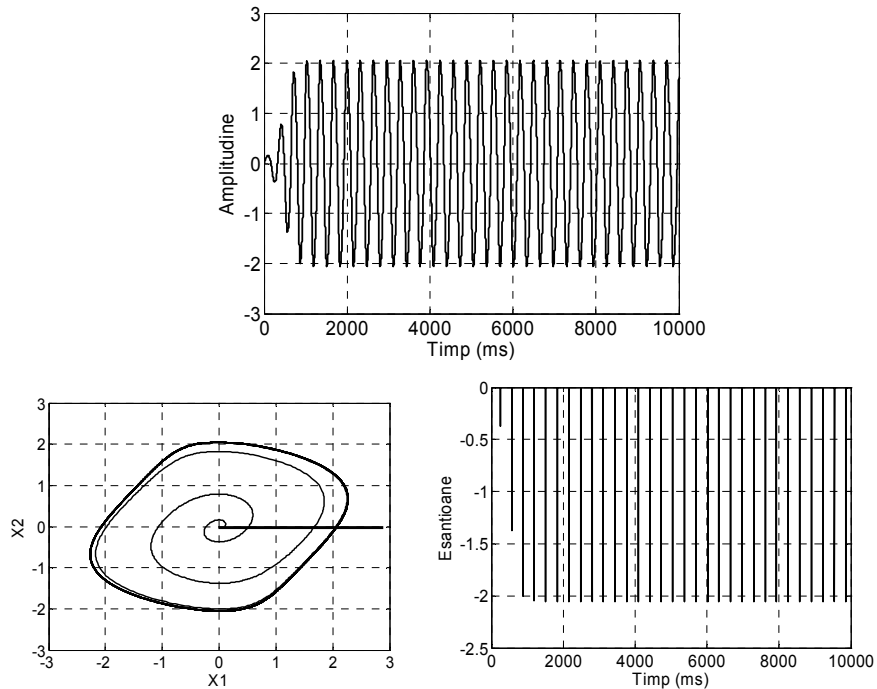


Fig. 4.9 Evoluția temporală pentru variabila de stare x_1 (sus), portretul de fază, cu reprezentarea semidreptei de secționare (stânga) și eşantioanele variabilei de stare a sistemului Poincare (dreapta) pentru un sistem Van der Pol cu $a = 1$

$$\begin{cases} x_1' = \omega_0 \cdot x_2 + a \cdot x_1 \cdot (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_0 \cdot x_1 \end{cases} \quad (4.119)$$

Termenul neliniar forțează variabilele de stare să aibă amplitudine unitară și alură sinusoidală, conform relației trigonometrice fundamentale.

$$1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t) = 1 \quad (4.120)$$

Această particularitate duce la o puritate spectrală mai bună, chiar în condițiile unei viteze mari de atingere a regimului permanent, impusă de amplificarea mult mai mare, $a = 4$.

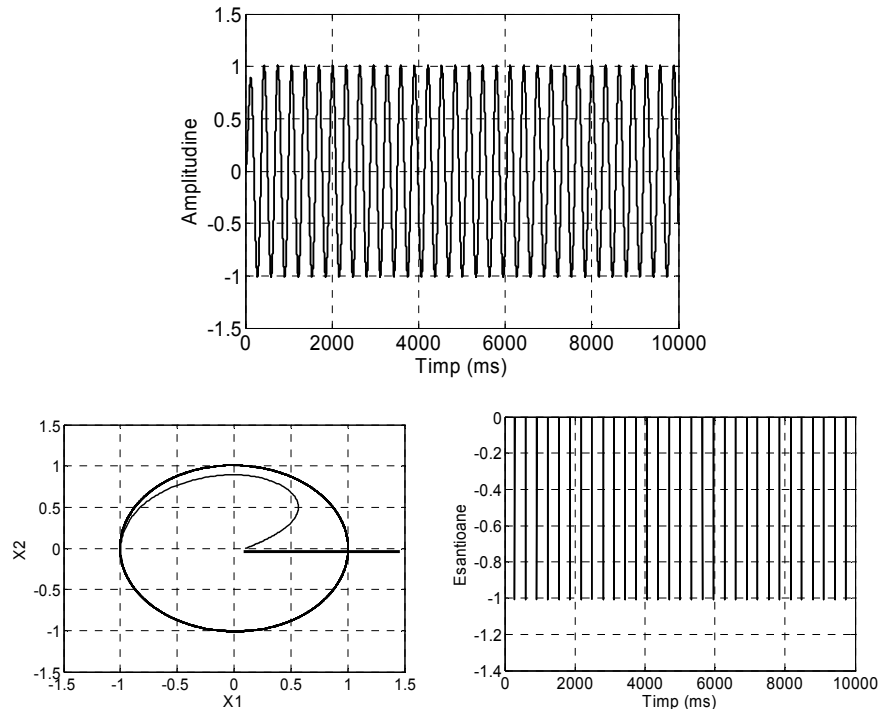


Fig. 4.10 Evoluția temporală pentru variabila de stare x_1 (sus), portretul de fază, cu reprezentarea semidreptei de secționare (stânga) și eșantioanele variabilei de stare a sistemului Poincare (dreapta) pentru un oscilator cuasiarmonic cu $a = 4$

4.3.4 Dinamica de tip cuasiperiodic

Comportarea cuasiperiodică este o altă categorie de dinamică inclusă în categoria mai largă de oscilații neliniare. Specificul acestui comportament neliniar constă în ne-repetitivitatea sa. Fiecare variabilă de stare a unui sistem prezentând dinamică de tip cuasiperiodic este reprezentabilă în domeniul frecvență printr-o densitate spectrală de amplitudine discretă, de linii, caracteristică unui semnal compus din componente sinusoidale. Deși fiecare componentă în parte este periodică, ansamblul lor este neperiodic dacă există măcar două componente de frecvențe necorelate armonice:

$$\frac{\omega_k}{\omega_m} \notin Q \Rightarrow \frac{T_m}{T_k} \notin Q \quad (4.121)$$

Din această cauză, nu există un interval de timp finit care să fie simultan multiplu al perioadei T_m și al perioadei T_k , constituind astfel o posibilă perioadă fundamentală a întregului semnal.

În spațiul stărilor, un astfel de sistem este caracterizat de o traiectorie care acoperă în mod dens o suprafață toroidală. Mulțimea limită poartă denumirea generică de *tor* (sau mai general *N-tor*), ceea ce conduce la denumirea alternativă a dinamicii ca fiind una de tip *toroidal*. Pentru a se putea obține astfel de comportări dinamice, fără ca traiectoria să se auto-intersecteze transvers, sistemele analogice trebuie să aibă ordinul strict mai mare decât doi; pentru sistemele în timp discret nu se impun limitări asupra ordinului.

Se pot obține astfel de comportări dinamice în cazul interconectării a două sau mai multe sisteme autonome de tip oscilator neliniar, pentru care frecvențele de oscilație nu sunt corelate armonice. Din punct de vedere al implementării acestei condiție revine la a lăsa sistemele să oscileze conectate, dar fără a mai introduce un circuit de sincronizare a fazei / frecvenței lor.

Exemplele care urmează, se bazează pe oscilatorul Van der Pol, descris de ecuațiile de stare (4.118) și pe oscilatorul cuasi-armonic, (4,119). Prin conectarea directă a două astfel de oscilatoare, se obține un sistem de ordinul patru, având ecuațiile de stare:

$$\begin{cases} x_1' = \omega_1 \cdot x_2 + a_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_1 \cdot x_1 \\ x_3' = \omega_2 \cdot x_4 + a_2 \cdot x_3 \cdot (1 - x_3^2 - x_4^2) + k \cdot x_1 \\ x_4' = -\omega_2 \cdot x_3 \end{cases} \quad (4.122)$$

Primul sistem, cu variabilele de stare $x_{1,2}$, oscilează liber pe frecvența f_1 (pulsăția ω_1), al doilea, caracterizat de variabilele de stare $x_{3,4}$, având pulsăția de oscilație

liberă ω_2 , funcționând forțat de variabila de stare x_2 , prin intermediul factorului de cuplaj, k . Schema bloc rezultată, este reprezentată în figura 4.11.

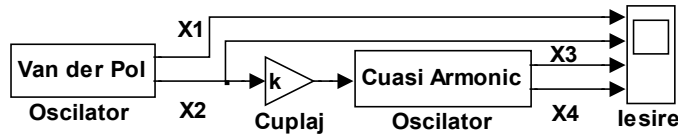


Fig. 4.11 Schema bloc a sistemului de două oscilatoare neliniare cuplate

Alegând pulsația normalizată $\omega_{1N} = 1$ și $\omega_{2N} = 3,3215$, se obțin formele de undă din figura 4.12, evidențiind ne-corelarea armonică a celor două variabile de stare alese: x_2 , pentru urmărirea evoluției oscilatorului modulator și x_4 , pentru oscilatorul modulat. De asemenea se poate evidenția ne-periodicitatea variabilei x_4 , anelopa ei ne-având perioda multiplu al perioadei semnalului purtător, $T_2 = 1 / f_2$.

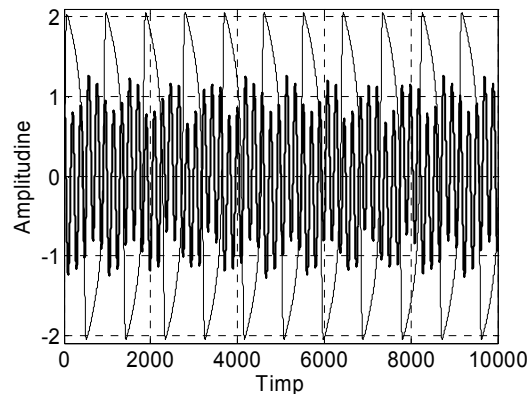


Fig. 4.12 Comparație între evoluția în timp a variabilei de stare x_2 și x_4 , pentru conexiunea directă, evidențiind ne-periodicitatea celei de-a doua

Portretul de fază al asistemului de ordinul patru nu este reprezentabil grafic, dar proiecțiile tridimensionale, reprezentate în figura 4.13, argumentează în mod grăitor cuasi-periodicitatea dinamicii sistemului, prin alura toroidală a graficelor și prin tendința de acoperire densă a suprafeței torului de către traiectoria sistemului,

sugerată de rezultatul simulării, chiar în condiții de interval de timp de simulare finit.

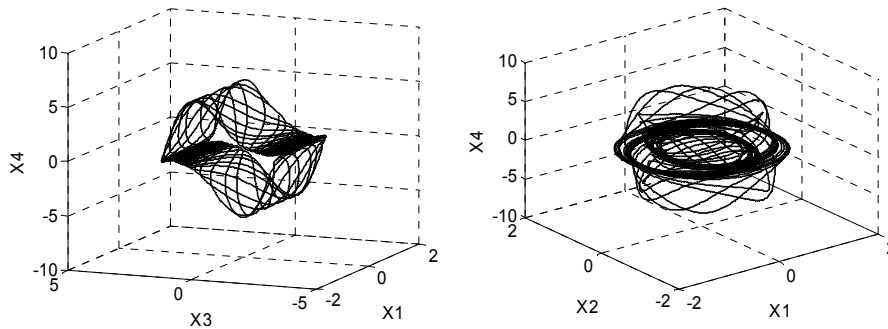


Fig. 4.13 Proiecții tridimensionale ale portretului de fază, pentru sistemului de dimensiune patru, realizat prin conexiunea directă a două oscilatoare

Aceeași concluzie este argumentată și de reprezentarea grafică a secțiunii Poincare, după hiper-planul descris de condiția $x_4 = 0$, în urma căreia rezultă sistemul discret tridimensional, având evoluția ne-periodică, reprezentată în figura 4.14.

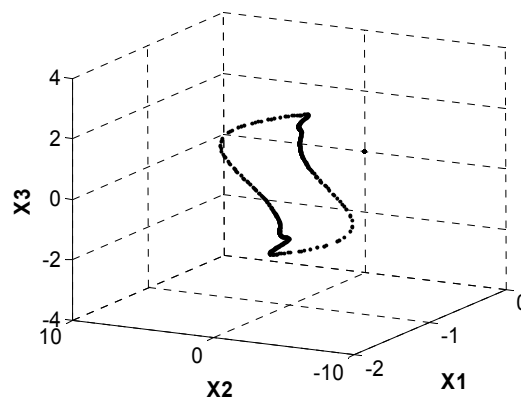


Fig. 4.14 Reprezentarea tridimensională a secțiunii Poincare prin spațiul stărilor sistemului de dimensiune patru

Din punct de vedere aplicativ, conectarea oscilatoarelor neliniare permite realizarea de sisteme de modulație. Datorită selectivității, dată de caracterul dinamic (cu memorie) al sistemelor, riguros modulația va avea caracter dual: și de

amplitudine și de fază / frecvență. Totuși, prin interpretarea termenilor din ecuațiile diferențiale este posibilă avantajarea unuia dintre tipurile de modulație. În ecuația neliniară a oscilatorului comandat, termenul liniar, dependent de parametrul ω_2 , dictează frecvența de oscilație liberă a oscilatorului cuasi-armonic, iar termenul neliniar, prin paranteza pătratică, limitează amplitudinea de oscilație.

Pe baza acestor interpretări, se poate genera semnal cu modulație mixtă, având componenta modulată în amplitudine dominantă, prin cuplarea semnalului modulator în interiorul parantezei de ordinul doi.

$$\begin{cases} x_1' = \omega_1 \cdot x_2 + a_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_1 \cdot x_1 \\ x_3' = \omega_2 \cdot x_4 + a_2 \cdot x_3 \cdot (1 + k \cdot x_1 - x_3^2 - x_4^2) \\ x_4' = -\omega_2 \cdot x_3 \end{cases} \quad (4.123)$$

Rezultatele de simulare, pentru variabilele de stare ale sistemului analogic, cât și pentru secțiunea Poincare, sunt prezentate în figura 4.15, justificând preponderența modulației de amplitudine.

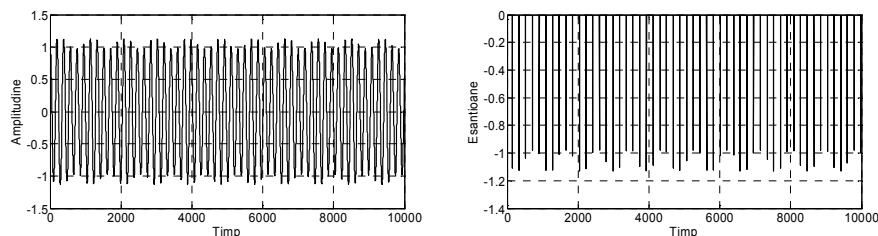


Fig. 4.15 Evoluția în timp a variabilei de stare x_4 (stânga) și a variabilei x_3 din secțiunea Poincare pentru conexiunea specifică modulației de amplitudine (dreapta)

În mod similar, prin sumarea semnalului modulator, oferit de oscilatorul Van der Pol, la coeficientul ω_2 , se dorește impunerea cu predominanță a componentei cu modulație de frecvență. Ecuațiile de stare ale sistemului rezultat sunt prezentate în relația (4.124).

$$\begin{cases} x_1' = \omega_1 \cdot x_2 + a_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2) \\ x_2' = -\omega_1 \cdot x_1 \\ x_3' = (\omega_2 + k \cdot x_1) \cdot x_4 + a_2 \cdot x_3 \cdot (1 - x_3^2 - x_4^2) \\ x_4' = -(\omega_2 + k \cdot x_1) \cdot x_3 \end{cases} \quad (4.124)$$

Deși în rezultatele de simulare, prezentate în figura 4.16, se remarcă o modulație de amplitudine parazită, deviația de frecvență, datorată modulației unghiulare, este evident mai mare față de exemplul anterior, subliniind preponderența modulației de fază / frecvență.

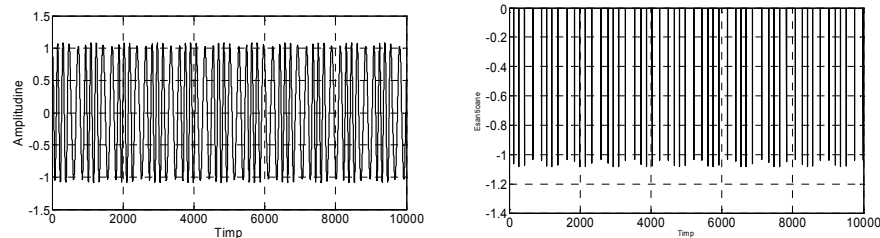


Fig. 4.16 Evoluția în timp a variabilei de stare x_4 (stânga) și a variabilei x_3 din secțiunea Poincare pentru conexiunea specifică modulației de frecvență (dreapta)

4.3.5 Dinamica haotică

Având în vedere că nu există o comportare dinamică mai complexă decât cea haotică, aceasta ar putea fi ușor definită ca "orice comportare, care nu intră în categoriile studiate anterior". Ca orice abordare facilă, aceasta nu aduce prea multe informații, care să lămurească mecanismul intern al dezvoltării haosului.

Sistemele care prezintă comportări haotice, în domeniul de condiții inițiale pentru care se manifestă aceasta comportare, au o serie de caracteristici comune, care pot fi considerate ca simptomatice pentru evidențierea calitativă, empirică a haosului [2]:

- variabilele de stare au o *evoluție temporală nerepetitivă*, cu o alură similară perturbațiilor aleatoare;

- fiecare variabilă de stare este caracterizată, în domeniul frecvență, de o *densitate spectrală de amplitudine plată*, de bandă largă, specifică zgomotului colorat;
- *portretul de fază* este o varietate diferențială de *dimensiune fracționară*, denumită *fractal*, în așa fel încât, el parcurge domeniul de atracție, fără a se intersecta cu el însuși sau a tinde asimptotic către o comportare preferențială;
- evoluția temporală a sistemului haotic este *senzitivă la condiția inițială* (și, implicit la parametrii sistemului și perturbațiile externe), aspect confirmat de valoarea pozitivă a *exponentului Liapunov* (generalizare la sisteme neliniare a noțiunii de valoare proprie specifică sistemelor liniare), portrete de fază pornind din condiții inițiale oricât de apropiate divergând, fără a tinde însă spre infinit;
- *extragerea de informație*, caracterizată prin faptul că, în timp, evoluția variabilelor de stare evidențiază tot mai precis valorile condițiilor inițiale și a parametrilor sistemului.

Pentru a se putea obține astfel de comportări dinamice, fără ca traiectoria să se auto-intersecteze transvers, sistemele analogice trebuie să aibă ordinul strict mai mare decât doi; pentru sistemele în timp discret nu se impun limitări asupra ordinului.

4.3.5.1 Definiții

În general, definițiile referitoare la comportările dinamice complexe se prezintă pentru un domeniu, X , îndeplinind condițiile de spațiu metric compact, pentru o metrică, d , generală. Pentru situațiile practice pe care le vom discuta în continuare, ne va fi suficient să luăm în considerație situația particulară a unui domeniu, D , ca un compact din \mathcal{X}^N , unde N este ordinul sistemului studiat, iar metrica este distanța Euclidiană în \mathcal{X}^N .

Definiție: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor $\mathbf{f} : D \rightarrow D$, este *dissipativ*, dacă divergența derivatei vectorului de stare păstrează semn constant, negativ, pe întreaga durată de evoluție a sistemului:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (4.125)$$

În relația de definiție, (4.125), divergența notează:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_N} \quad (4.126)$$

Dacă se calculează evoluția în timp a unui volum de condiții inițiale, V , mărginit de o suprafață netedă, S , având normala exterioară la suprafață, \mathbf{n} , se obține relația:

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.127)$$

Combinând această relație cu teorema divergenței:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (4.128)$$

se obține ecuația diferențială ce guvernează evoluția în timp a volumului:

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \, dV \quad (4.129)$$

Atâta timp cât condiția de ne-pozitivitate a divergenței, (4.125), este îndeplinită, evoluția volumului stărilor va fi una descrescătoare în timp, justificând interpretarea de disipativitate a sistemului analizat.

Un sistem neliniar analogic, de ordinul trei, având proprietatea de disipativitate este sistemul Lorenz, descris de ecuațiile diferențiale:

$$\begin{cases} dx/dt = \sigma \cdot (y - x) \\ dy/dt = \rho \cdot x - y - xz \\ dz/dt = -\beta \cdot y + xy \end{cases} \quad (4.130)$$

Se poate calcula divergența membrului drept al ecuațiilor diferențiale, rezultând:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\sigma - \beta - 1 \quad (4.131)$$

Dacă suma parametrilor, $\sigma + \beta$, este mai mare decât -1 , divergența este negativă, evidențiind proprietatea de disipativitate a sistemului Lorenz, pentru această gama de valori ale parametrilor. În plus, valoarea divergenței este constantă, ceea ce permite obținerea unei forme ușor integrabile a ecuației de evoluție a volumului din spațiul stărilor, în forma:

$$\dot{V} = -a \cdot V \quad a = -\sigma - \beta - 1 \quad (4.132)$$

Prin integrare, se obține evoluția temporală a volumului stărilor, în forma unei exponențiale căzătoare la zero:

$$V(t) = V(0) \cdot e^{-a \cdot t} \quad (4.133)$$

Definiție: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor $\mathbf{f} : D \rightarrow D$, este *ergodic*, sau *topologic tranzitiv*, dacă există o condiție inițială, \mathbf{x}_0 , în domeniul D , astfel încât orbita sistemului pornind din această condiție inițială să fie densă într-un subdomeniu conex și închis, X , inclus în D :

$$Clo \{ \mathbf{x}(t) \}_{t \geq 0} = X \quad (4.134)$$

În relația (4.134) am notat cu Clo închiderea (mulțimea punctelor de acumulare) a unei mulțimi. Noțiunea de tranzitivitate topologică semnifică, din punct de vedere intuitiv, faptul că traiectoria sistemului "umple" (parcurge dens) subdomeniul X , inclus în D , justificând, în unele aplicații, interpretarea evoluției haotice ca un proces de "căutare". Ca terminologie, caracterizarea sistemelor topologic tranzitive ca fiind ergodice este corelată de noțiunile de statistică a variabilelor aleatoare. Cel puțin pentru sisteme discrete, se poate demonstra faptul că un sistem ergodic, în sensul definiției precedente, generează semnale ergodice în sens statistic [1].

Un sistem, similar sistemului Lorenz, având ecuații puțin mai simple, dar o comportare dinamică la fel de complexă, este sistemul Rossler, descris de ecuațiile:

$$\begin{cases} dx/dt = -y - z \\ dy/dt = x - a \cdot y \\ dz/dt = b + x \cdot z - c \cdot z \end{cases} \quad (4.135)$$

O simulare a evoluției acestui sistem, pentru valorile parametrilor utilizate uzual pentru evidențierea caracterului său ergodic: $a = -0,2$, $b = 0,2$ și $c = 5,7$ și pornind din condiția inițială $\mathbf{x}(0)^T = [5,0 \ 3,1 \ 3,0]$ sugerează tendința sistemului de a parcurge dens un domeniu tridimensional de forma reprezentată în figura 4.17:

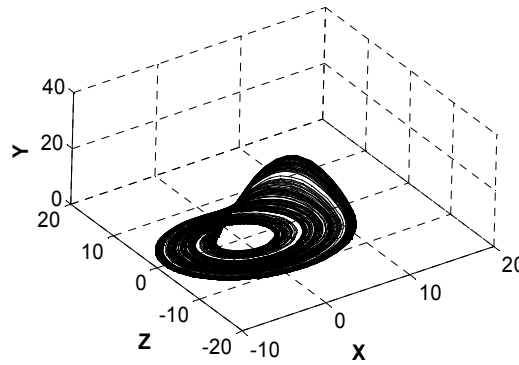


Fig. 4.17 Reprezentarea grafică a unui exemplu de evoluție tridimensională a sistemului Rossler

Definiție: Sistemul dinamic, având funcția de tranziție a stărilor $\mathbf{f} : D \rightarrow D$, este senzitiv la condițiile inițiale dacă există o constantă pozitivă, M , astfel ca, pentru oricare două condiții inițiale oricât de apropiate între ele, dar distincte, există un moment de timp după care traiectoriile se distanțează între ele mai mult decât limita impusă, M , eventual exceptând o mulțime de momente de măsură nulă:

$$\exists M \in \mathfrak{R}_+ \forall \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0) \in X \exists T_0 : \forall t \geq T_0 \ d(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) \geq M \quad (4.136)$$

sau, în cazul discret:

$$\exists M \in \mathfrak{R}_+ \forall \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0) \in X \exists K_0 : \forall k \geq K_0 \ d(\mathbf{x}_1[k], \mathbf{x}_2[k]) \geq M \quad (4.137)$$

Un exemplu ce evidențiază sensibilitatea sistemului Rossler la condițiile inițiale este prezentat în continuare. Simulările ale căror rezultate sunt prezentate în figurile următoare au fost realizate pentru două sisteme identice, plecând din condiții inițiale foarte apropiate: $\mathbf{x}_1(0)^T = [5,0 \ 3,10 \ 3,0]$ și $\mathbf{x}_2(0)^T = [5,01 \ 3,10 \ 3,0]$. Așa cum se remarcă din figura 4.18, cele două traiectorii, una reprezentată cu linie continuă subțire, cea de-a doua cu linie întreruptă groasă, sunt apropiate pentru un interval scurt de timp, divergând exponențial pe măsura trecerii timpului.

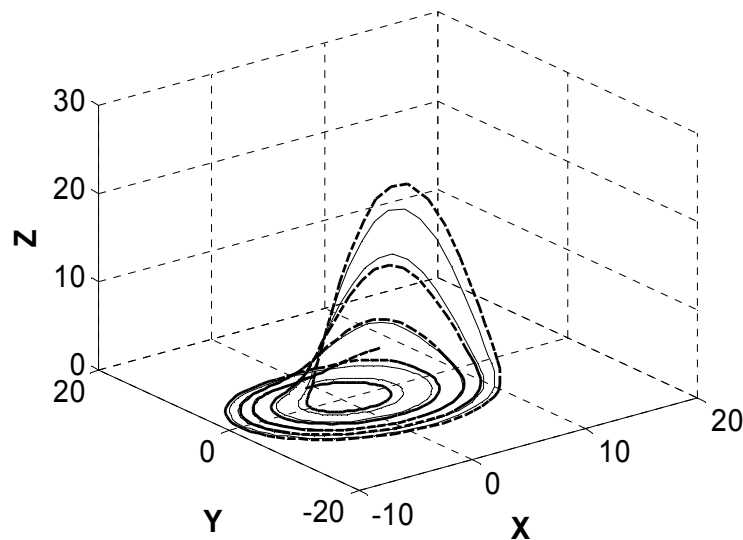


Fig. 4.18 Portretele de fază pentru două sisteme Rossler pornind din condiții inițiale apropiate

Pentru a evidenția mai clar diferența între cele două traiectorii, pentru aceeași simulare s-a calculat norma erorii între cei doi vectori de stare:

$$\varepsilon(t) = \sqrt{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} = \sqrt{\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \quad (4.138)$$

În figura 4.19 se remarcă evoluția crescătoare a erorii, $\varepsilon(t)$, pe un orizont temporal de 900 ms, din care numai primele 100 ms traiectoriile sunt apropiate, ducând la o eroare suficient de mică spre a fi neglijabilă.

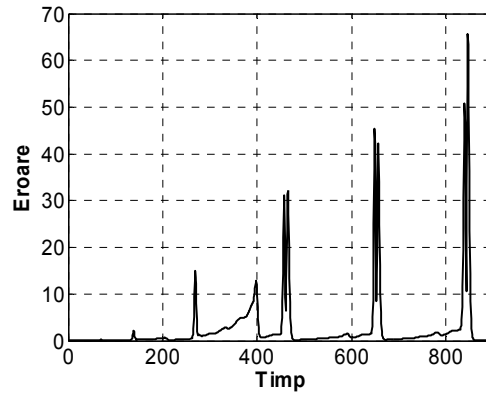


Fig. 4.19 Norma erorii între vectorii de stare a două sisteme Rossler pornind din condiții inițiale apropiate

Senzitivitatea sistemelor la condiția inițială are drept consecință și sensibilități similare la micile diferențe ale parametrilor, sau la perturbații de amplitudini mici. În figura 4.20 sunt reprezentate erorile între vectorii de stare a două sisteme Rossler având aceleași condiții inițiale, dar, pentru graficul din stânga, diferențe la a treia zecimală pentru unul dintre parametri, respectiv o perturbație aleatoare de amplitudine mai mică de 10^{-3} , pentru graficul din dreapta.

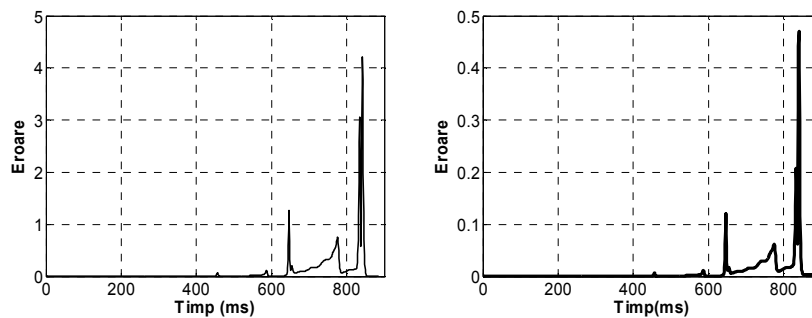


Fig. 4.20 Norma erorii între vectorii de stare a două sisteme Rossler pentru diferența între parametrii a (stânga) și perturbație aleatoare (dreapta) de 10^{-3}

Există două definiții general acceptate pentru dinamica haotică: definiția slabă datorată lui Wiggins și cea tare introdusă de Dewaney.

Definiție: un sistem dinamic, neliniar se numește *haotic în sens slab*, dacă este:

1. disipativ;

2. sensibil la condițiile inițiale;
3. ergodic.

Pentru a fi *haotic în sens tare*, în plus față de cele trei condiții anterioare, mai este necesar ca domeniul D să conțină o infinitate numărabilă, densă în D , de cicluri limită repulsoare. Această condiție suplimentară dă un înțeles profund aspectului complex al portretului de fază al unui sistem haotic. Pornind cu o condiție inițială, \mathbf{x}_0 , din domeniul D , apropierea acesteia de un ciclu limită instabil face traiectoria sistemului să se îndepărteze de respectivul ciclu limită. Mulțimea ciclurilor limită fiind densă, traiectoria sistemului se va apropia de un alt ciclu limită, care însă o va respinge la rândul său. Numărul infinit al ciclurilor limită instabile face ca "ricoșeurile" succesive ale traiectoriei să se extindă pe toată durata evoluției sistemului, fragmentând alura portretului de fază.

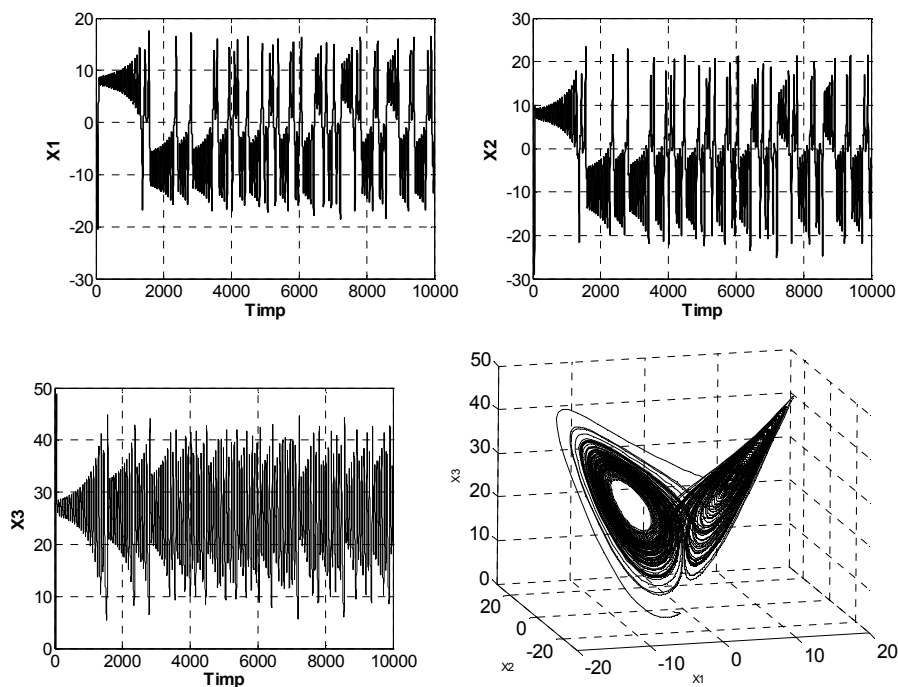


Fig. 4.21 Evoluția temporală pentru cele trei variabile de stare a sistemului Lorenz și portretul de fază tridimensional (dreapta jos)

Având în vedere mai marea ușurință de a analiza sistemele și semnalele discrete, o modalitate de a evidenția comportarea haotică, este aplicarea secțiunii Poincare. Pentru un sistem haotic analogic de ordinul N , prin secționare Poincare se obține un sistem discret, de ordinul $N - 1$, tot cu o comportare dinamică haotică.

Exemplele expuse în continuare fac apel la sistemul Lorenz, descris de ecuațiile de stare (4.130). Realizând simulări pe un orizont de timp suficient de mare, se obțin evoluții în timp ne-repetitive, cu alură aleatoare, sugerând comportarea haotică a acestui sistem, așa cum se remarcă în fig. 4.21. Tot în această figură se evidențiază și alura tranzitivă a portretului de fază, sugerând două oscilații, pe două suprafețe strâmbe ce se intersectează, cu salt aleator de pe un tip de oscilație pe celălalt.

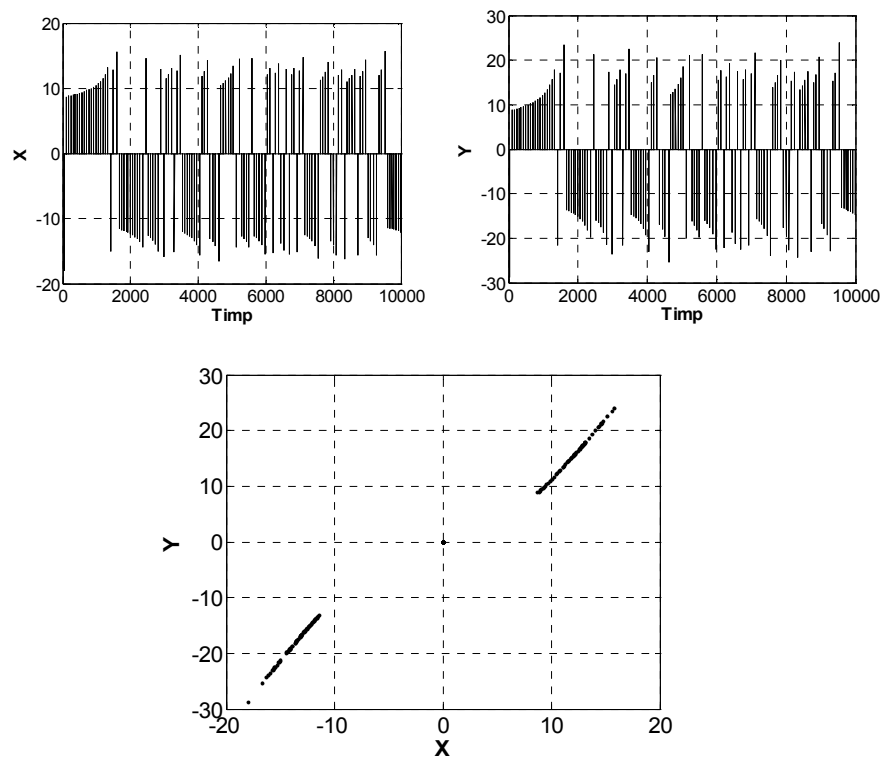


Fig. 4.22 Evoluția în timp a eşantioanelor stării secțiunii Poincare (sus) și portretul de fază corespunzător (jos)

Secțiunea Poincare, reprezentată grafic în figura 4.22, rezultă prin intersecția traiectoriei sistemului cu planul descris de ecuația $z = 28$, aleasă din dorința obținerii unui număr cât mai semnificativ de puncte de intersecție, pentru o reprezentare grafică sugestivă. Și aceste rezultate de simulare sugerează dinamica haotică a sistemului studiat.

4.3.5.2 Exponenți Liapunov

O măsură a sensibilității sistemului analizat la condițiile inițiale poate fi realizată pe baza *exponenților Liapunov*. Fără nici o pretenție de rigoare, am putea interpreta intuitiv aceste mărimi ca fiind similarul valorilor proprii ale matricei de tranziție a stărilor pentru un sistem liniar, "generalizate" la cazul sistemelor neliniare. Similar valorilor proprii, exponenții Liapunov sunt în număr egal cu ordinul sistemului analizat, sugerând că fiecare exponent Liapunov evidențiază sensibilitatea sistemului analizat "pe direcția" variabilei de stare cu același indice.

Definim exponenții Liapunov ca tendințe asimptotice de separare a două traiectorii ale unui sistem dinamic, care pornesc din condiții inițiale infinit apropiate. În cazul sistemelor analogice, notând cu $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ două traiectorii ale aceluiași sistem N -dimensional, plecând din condițiile inițiale $\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)$, putem detalia analitic:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \left(\lim_{\mathbf{u}(0) \rightarrow \mathbf{v}(0)} \frac{u_n(t) - v_n(t)}{u_n(0) - v_n(0)} \right) \quad n = 1, \dots, N \quad (4.139)$$

Judecând similar pentru sisteme în timp discret, putem rescrie ecuația anterioară:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\lim_{\mathbf{u}[0] \rightarrow \mathbf{v}[0]} \frac{u_n[k] - v_n[k]}{u_n[0] - v_n[0]} \right) \quad n = 1, \dots, N \quad (4.140)$$

Calculul efectiv al valorilor exponenților Liapunov este în general dificil, în cazul analogic existând situații când este chiar imposibil. Principiul general se bazează pe liniarizare, dar nu în jurul unui punct, ci de-a lungul unei întregi traiectorii. Pentru fiecare moment de timp, se deduce sistemul liniarizat în jurul

vectorului de stare curent, $\mathbf{x}(t)$, sau $\mathbf{x}[k]$. Pentru matricea de tranziție a stărilor, dependentă de timp, $\mathbf{A}(t)$, sau $\mathbf{A}[k]$, se calculează valorile proprii, $\lambda_n(t)$, sau $\lambda_n[k]$. Interpretând valorile proprii ale matricei de tranziție a stărilor ca viteze instantanee de divergență a traiectoriilor, relațiile de definiție, (4.139) și (4.140), se modifică prin explicitarea limitelor din paranteze:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot (\ln |\lambda_n(t)|) \quad n = 1, \dots, N \quad (4.141)$$

pentru cazul sistemelor analogice, respectiv, pentru sisteme discrete:

$$\hat{\lambda}_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot (\ln |\lambda_n[k]|) \quad n = 1, \dots, N \quad (4.142)$$

Dificultatea principală în determinarea valorilor exponenților Liapunov este legată de determinarea valorilor proprii într-un număr infinit de puncte. Dacă în cazul discret, putem evalua cu oarecare încredere exponenții Liapunov prin aproximarea limitei cu estimatorul corespunzător unei valori mari dar finite a timpului discret, k , pentru sisteme analogice, între valoarea corectă și estimarea realizată prin simulare numerică se mai interpune și algoritmul de discretizare a ecuațiilor analogice, care ridică un semn suplimentar de întrebare asupra preciziei valorii estimate.

Următoarele rezultate matematice, ne permit să tragem totuși o serie de concluzii calitative, chiar printr-o analiză numerică.

Teoremă: dacă divergența funcției vectoriale de tranziție a stărilor este constantă de-a lungul traiectoriei sistemului, atunci valoarea ei este dată de suma exponenților Liapunov:

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n \quad (4.143)$$

În consecință, pentru sisteme conservative, suma exponenților Liapunov este nulă, iar pentru sisteme disipative, negativă.

Teoremă: valoarea exponenților Liapunov nu depinde de condiția inițială din care pornește traiectoria sistemului, atâta timp cât aceasta se limitează la bazinul de atracție al aceleiași mulțimi limită.

Din punctul de vedere al estimării numerice a valorilor exponenților Liapunov, acest rezultat ne asigură de faptul că orice traiectorie utilizată calculul aproximativ, este matematic validă. Nu ni se oferă însă aceleași garanții privind viteza de convergență.

Pentru interpretarea rezultatelor obținute, este important de remarcat corespondența între valorile exponenților Liapunov, și comportarea dinamică a sistemului neliniar analizat.

Teoremă: dinamica neliniară poate fi clasificată, luând în considerație valorile exponenților Liapunov, în forma:

- În cazul *dinamicii constante*, toți exponenții Liapunov sunt negativi;
- *Dinamica periodică* este caracterizată de un exponent Liapunov nul, iar restul negativi;
- Mai mulți exponenți Liapunov nuli, iar restul negativi, implică o *dinamică de tip cuasiperiodic*;
- Cel puțin un exponent Liapunov pozitiv, restul fiind nuli sau negativi, conduce la concluzia de *dinamică haotică* (situația mai multor exponenți Liapunov pozitivi poartă numele de *hiperhaos*).

4.3.5.3 Dinamica simbolică

O încercare de algebrizare a problematicii sistemelor neliniare este oferită de abordarea, indusă de teoria ergodică, denumită *dinamică simbolică*. Metoda, prezentată pe scurt în continuare, se bazează pe cuantizarea stării sistemelor dinamice neliniare și este orientată numai spre analiza sistemelor în timp discret. Acest tip de abordare oferă o deschidere naturală cu privire la studiul dinamicii neliniare a convertoarelor de date (analog - numerice și numeric - analogice).

Definiție: mulțimea finită $S = \{s_1, \dots, s_B\}$ se numește *alfabetul* dinamicii simbolice, $\{s_b\}_{b=1, \dots, B}$ purtând denumirea de *simboluri* ale acesteia.

Definiție: aplicația cu valori finite:

$$Q_B : \mathfrak{R}^N \rightarrow S \quad Q_B(\mathbf{x}[k]) = s[k] \quad (4.144)$$

poartă denumirea de *dinamică simbolică*.

O metodă eficientă, având și aplicabilitate practică, de a defini o dinamică simbolică este aceea de a alege un domeniu de interes, D , inclus în spațiul vectorilor de stare ai sistemului discret, neliniar supus analizei și partiționarea acestuia într-un număr finit, B , de subdomenii. Subdomeniile, $\{D_b\}_{b=1, \dots, B}$ trebuie să respecte condițiile de corectă definire a partiției:

$$\bigcup_{b=1}^B D_b = D \quad D_b \cap D_c = \Phi \quad \forall b \neq c \quad (4.145)$$

Atașând fiecărui subdomeniu, D_b , un simbol, s_b , din alfabetul dinamicii simbolice, putem defini dinamica simbolică prin aplicația:

$$Q_B(\mathbf{x}) = \sum_{b=1}^B s_b \cdot w_b(\mathbf{x}) \quad (4.146)$$

Am notat funcția de apartenență a subdomniului D_b cu $w_b(\mathbf{x})$, în sensul:

$$w_b(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \mathbf{x} \in D_b \\ 0 & \Leftrightarrow \mathbf{x} \notin D_b \end{cases} \quad (4.147)$$

Aplicația astfel definită poate fi extinsă apoi la întregul spațiu al stărilor. În funcție de aplicație, se poate realiza o prelungire prin periodizare sau prin adăugarea unui simbol suplimentar în alfabet, care să cuantizeze situarea stării înafara domeniului, D . Ultima variantă este avantajoasă mai ales dacă se dorește mascarea unor eventuale comportări dinamice ce se manifestă în exteriorul domeniului studiat.

Pentru implementarea unei cuantizări uniforme, întâlnită la convertoarele de date uzuale, se pot alege subdomenii egale ca dimensiuni. De exemplu, pentru un sistem unidimensional, cu pasul de cuantizare q/B , subdomeniile pot fi definite:

$$D_b = [(b-1) \cdot q/B, b \cdot q/B); \quad s_b = b-1; \quad \forall b = 1, \dots, B \quad (4.148)$$

Această definiție a subdomeniilor asigură disjunctivitatea și completitudinea partiției (4.145), pentru domeniul $D = [0, q)$, asigură calculul comod al funcției de cuantizare $Q_b(\mathbf{x})$, (4.146), și permite etinderea prin periodicitate, dacă aceasta modelează corect funcționarea convertorului A/N.

Nu pentru toate tipurile de comportări dinamice ale sistemelor discrete neliniare, dinamica simbolică este la fel de relevantă. Pentru cazul dinamicii constante, dinamica simbolică este și ea constantă, după un eventual regim tranzitoriu de lungime finită, luând valoarea s_b , corespunzătoare subdomeniului, D_b , care include punctul fix. Modul în care evoluează dinamica simbolică în cazul ciclurilor limită depinde de alegerea subdomeniilor. Pentru o alegere rațională, conform căreia domeniul, D , cuprinde domeniul estimat de atracție pentru ciclul limită, iar subdomeniile partiționează ciclul limită în cel puțin două submulțimi, dinamica simbolică are o evoluție periodică. Aceste condiții rămân valabile și în studiul dinamicii cuasiperiodice, în această situație dinamica simbolică fiind cuasiperiodică la rândul ei. De asemenea, în cazul dinamicii haotice, secvența cuantizată prin dinamica simbolică este ne-repetitivă în mod haotic.

Un exemplu tipic de utilizare a dinamicii simbolice uniforme pentru studiul unui sistem discret cu dinamică haotică este constituit de iterarea unidimensională a deplasării binare de tip Bernoulli:

$$x[k+1] = f(x[k]); \quad f(x) = 2 \cdot x - \text{sign}(x) \quad (4.149)$$

Pentru ca un sistem unidimensional să aibă o dinamică haotică, funcția de tranziție a stărilor trebuie să fie ne-injectivă, să fie surjectivă pe o mulțime compactă, în cazul nostru $I = [-1, 1)$, condiții ușor verificabile pentru funcția (4.149), chiar prin simplă inspecție vizuală pe reprezentarea grafică din figura 4.23.

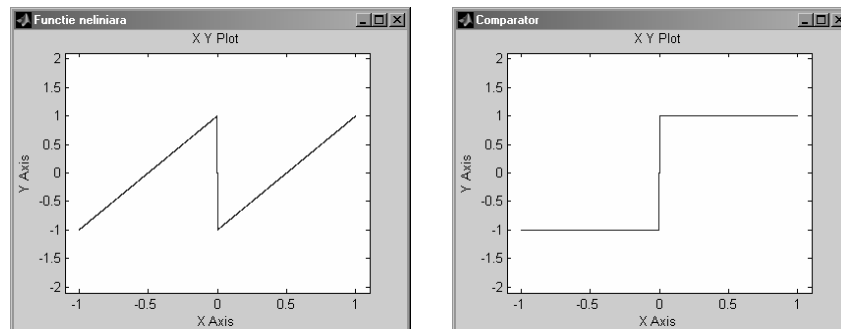


Fig. 4.23 Caracteristica neliniară a deplasării binare Bernoulli (stânga) și dinamica simbolică asociată (dreapta)

Adoptând o dinamică simbolică bazată pe cuantizarea pe două nivele -1 și $+1$, corespunzătoare subintervalelor $[-1, 0)$, respectiv $[0, 1)$, rezultă schema bloc din figura 4.24.

Comportarea haotică a sistemului, ca și modul în care dinamica simbolică reflectă acest tip de evoluție temporală, sunt sugerate de graficele cu rezultate de simulare din figura 4.25.

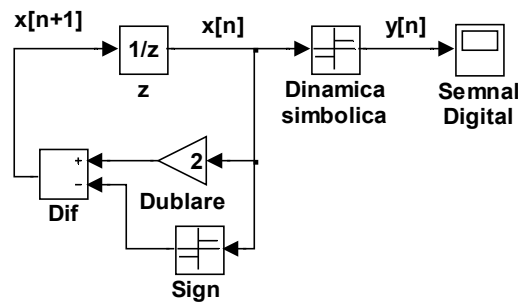


Fig. 4.24 Schema bloc a sistemului Bernoulli

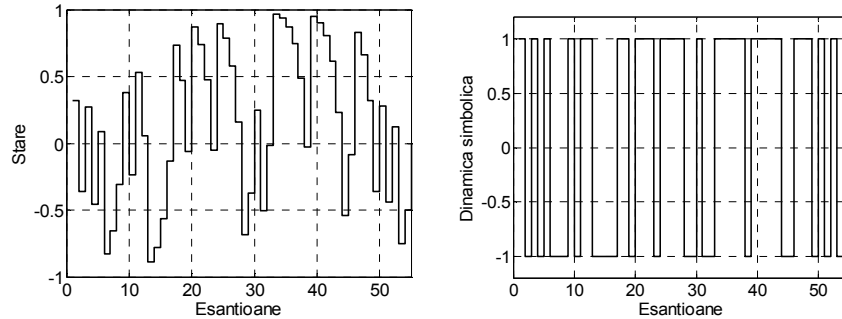


Fig. 4.25 Evoluția temporală a variabilei de stare (stânga) și a dinamicii simbolice (dreapta) pentru condiția inițială $x_0 = 0,31$

Pe lângă modelarea funcționării circuitelor de conversie a datelor, dinamica simbolică poate fi folosită în scopul verificării comportării haotice a secțiunilor Poincare prin traiectoriile sistemelor analogice. Exemplul ce urmează continuă studiul realizat pe sistemul Lorenz. Portretul de fază al secțiunii Poincare, din figura 4.21, sugerează existența a două zone de grupare a punctelor: cadranul I și cadranul III. La această sugestie, realizând o dinamică simbolică bazată pe cuantizarea pe două nivele a variabilelor de stare, în funcție de semnul acestora, rezultă o evoluție neperiodică, de genul celei prezentate în figura 4.26, care confirmă comportarea haotică a sistemului analizat.

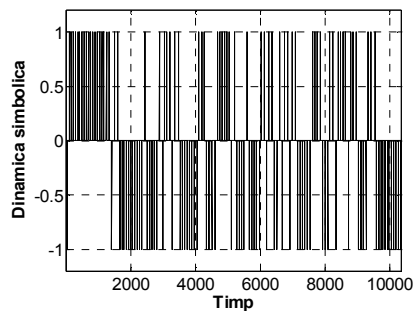


Fig. 4.26 Dinamica simbolică atașată secțiunii Poincare prin sistemul Lorenz

4.4 Concluzii

Studiul sistemelor neliniare deschide calea unor metode de prelucrare a semnalelor cu un mare grad de noutate și cu posibile îmbunătățiri de performanță, în raport cu metodele clasice, liniare. Capitolul de față a urmărit să contureze principalele aspecte teoretice constituind metodologia de studiu a unui sistem neliniar, din punctul de vedere al dinamicii sale interne. Modalitatea de construcție a unui model matematic adecvat urmată de clasificarea comportamentelor dinamice ce pot fi puse în evidență în evoluția sistemelor neliniare au constituit principalele direcții de investigare a fenomenelor neliniare. Este de remarcat nivelul mai scăzut de dezvoltare al domeniului dinamicii neliniare, comparativ cu studiul sistemelor liniare. De aici nivelul mai scăzut de abstractizare și, implicit numărul mai redus de algoritmi algebrici, care să permită obținerea de rezultate cantitative, care să sprijine, la rândul lor, proiectarea sistemelor dinamice neliniare. Multe dintre rezultatele existente în domeniul dinamicii neliniare se bazează pe liniarizarea sistemelor neliniare analizate. Mare parte a rezultatelor de utilitate practică oferă mai mult condiții și interpretări pentru simulările numerice, decât soluții generale de analiză cantitativă.

Metodele de analiză a comportamentelor dinamice simple, cum ar fi comportarea constantă, sau oscilațiile periodice sunt mai cantitative și mai ușor de interpretat intuitiv. Bazate pe algoritmi de sorginte liniară, studiile de atractivitate pentru punctele de echilibru și punctele fixe, pot oferi rezultate generale și cantitative, în special în varianta liniarizării locale. De asemenea, analiza ciclurilor limită, bazată pe multiplicatorii caracteristici, pare mai apropiat proiectantului obișnuit cu metodele liniare. Rezultatul de maximă putere și generalitate este însă secțiunea Poincare, ce oferă o înțelegere profundă asupra legăturii între sistemele neliniare continue și discrete. Comportările complexe, de tip cuasiperiodic sau haotic, sunt cele mai promițătoare din punct de vedere aplicativ, în special în domeniile sistemelor de modulație și conversie de date, dar beneficiază mult mai puțin de rezultate de analiză algebrice. În acest sens dinamica simbolică poate fi o dechidere promițătoare.

Bibliografie

- [1] J. Guckenheimer, P. Holmes: "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields", *Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983*.
- [2] T. S. Parker, L. O. Chua: "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems", *Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1989*.
- [3] T. S. Parker, L. O. Chua: "Chaos: a Tutorial for Engineers," *Proc. IEEE, Vol. 75, No. 8, pp. 982-1008, Aug. 1987*.
- [4] D. D. Siljak: "Nonlinear Systems; The Parameter Analysis and Design", *John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1969*.
- [5] W. J. Cunningham: "Introduction to Nonlinear Analysis", *McGrawHill Book Company, New York, Toronto, 1958*.
- [6] L. M. Holtzman: "Nonlinear System Theory; A Functional Analysis Approach", *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970*.
- [7] M. Morse, G. A. Hedlund: "Symbolic dynamics, I", *Amer. J. Math. 60. (1938), pag. 815-866*.
- [8] M. Morse, G. A. Hedlund: "Symbolic dynamics, II", *Amer. J. Math. 62 (1940), pp. 1-40*.
- [9] C. W. Wu, L. O. Chua: "Symbolic Dynamics of Piecewise Linear Maps" *IEEE Trans Circ. Syst. II, Vol. CAS 41, No. 6, June 1994, pag. 420-424*.
- [10] M. J. Kearney, J. Stark: "An Introduction to Chaotic Signal Processing" *GEC Journal of Research, Vol. 10, No. 8, pp. 52-58, Aug. 1992*.
- [11] L. O. Chua, T. Lin: "Chaos in Digital Filters", *IEEE Trans. Circ. Sys., 35(1988), pp. 648-658*.
- [12] V. Grigoraș: "Discrete Chaotic Circuit Performs Analog to Digital Conversion", *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik, No. 5, Vol. 48, September 1994, pag. 272-275*.
- [13] A. Leuciuc; V. Grigoraș: "Finite Time Chaos Synchronization in Bijective Triangular Form Systems", *International Journal of Chaos Theory and Applications, No. 1, Vol. 2, May 1997, pag. 3-16*
- [14] V. Grigoraș: "Symbolic Dynamics for Chaotic A/D Converters" *Proceedings of the International Symposium "Electronics and Telecommunications" ETC'94, Timisoara, Romania, 29-30 September 1994, pag. 89-94*.
- [15] V. Grigoraș: "Chaos Synchronization in State Space Digital Filters" *Proceedings of the 4th International Specialist Workshop on 'Nonlinear Dynamics in Electronic Circuits' NDES-96, Seville, Spain, June 27-28, 1996, pag. 179-182*.