Universitatea Tehnica “Gh. Asachi” Iasi
Facultatea de Electronica si Telecomunicatii

Rezumatul tezei de doctorat

Contributii la Studiul Retelelor Celulare Neurale

Îndrumator stiintific: prof. Liviu Goras

Candidat: ing. Tiberiu-Dinu Teodorescu

IASI, 2002

Introducere

În ultimii ani a luat o amploare deosebita notiunea de calculator analogic, bazat pe retele neuronale celulare (CNN[1]). O proprietate particulara a CNN-urilor fata de retelele neuronale clasice este aceea ca sunt foarte atractive pentru implementarea în tehnologie VLSI. Legaturile între entitatile componente sunt în acest caz locale, spre deosebire de retelele neuronale clasice, la care legaturile între entitatile componente sunt în cazul general totale[2]. Notiunea de functie de activare din teoria retelelor neuronale clasice[3] .este prezenta si la CNN-uri.
Pornind de la primele articole de Chua si Yang [1,2] în 1988, conceptul a fost dezvoltat de-a lungul timpului. Potentialul mare al acestui tip de sisteme vine din faptul ca este utilizabil într-o clasa de aplicatii relativ larga, pornind de la prelucrarea de imagini, conversia analog – numerica [3], generarea de semnal haotic [4-7], realizând tipurile de procesare enuntate la o viteza mult mai mare decât cea a unui calculator numeric performant, chiar realizat într-o arhitectura multiprocesor. Viteza acestui tip de sistem este evaluata în termeni de operatii pe secunda a 10 terra [8-11].
În prezent exista variante diverse de implementare a acestor sisteme, insa cea mai semnificativa este realizata de Institutul de Microelectronica de la Sevilla, Spania, care a realizat pâna în prezent chip-ul cu 128x128 de celule identic si local interconectate[4] [12,13]. Dupa realizarea chip-ului care implementeaza sistemul s-a trecut la valorificarea mai buna a posibilitatilor de procesare prin introducerea conceptului de Masina Universala de Calcul [12-22]. Pe scurt, implementarea acestui concept a permis folosirea sistemului pentru procesari mai complicate decât cele care se pot efectua într-un singur ciclu masina.
Câteva date despre procesorul analogic realizat în toamna lui 2001 ce foloseste conceptul de CNN sunt date mai jos:

Tehnologie	STM 0.35μm, 5M-1P
Stilul de design	Full custom pentru partea de nucleu de procesare si utilizând celule standard pentru partea de intrare/iesire digitala
Capsula	Ceramic QFP144
Numar de celule	16384 (retea de 128x128 celule)
Numar de tranzistoare	3.748.170
Tranzistoare/celula	198
Dimensiunea celulei	75.7μm x 73.3 μm
Densitatea celulelor	180 celule/mm^2
Gama dinamica a starii	0.6-1.4 V (programabila)
Gama dinamica a „ponderilor”	2.15-2.95 V (programabila)
Tactul pentru operatiile de I/O	32MHz
Tensiunea de alimentare	3.3V (+/- 10%)
Putere consumata	<4 Watts
Numarul instructiunilor analogice	32
Numarul maxim al instructiunilor digitale	64 x 64 configuratii (pentru ponderi)
Dimensiune	11885 μm x 12230 μm

Numele de cod al procesorului analogic realizat este ACE16k si functioneaza la o rezolutie modesta, de 8 biti. Chiar daca acesta este un procesor analogic (toate operatiile au loc în domeniu analogic), el poate fi comandat dintr-un mediu digital. Pentru aceasta, procesorul încorporeaza un banc de convertoare D/A pentru furnizarea intrarii si un banc de convertoare A/D pentru furnizarea iesirii convertita în cod binar. În acest caz imaginea procesata este manipulata linie cu linie. Procesorul este proiectat sa lucreze atât cu imagini achizitionate de modulul optic al chip-ului (intrare analogica) sau sa fie interfatat cu un sistem digital. În ultimul caz lucreaza ca un co-procesor dedicat pentru prelucrari de imagini ultra-rapide.
Teza de fata studiaza posibilitatile de procesare liniara si neliniara de semnal 1D si 2D, acoperind la “capitolul” de contributii originale o parte din clasa de aplicatii legate de prelucrarea de imagini si punând în evidenta pentru domeniul de functionare liniara a sistemului potentialul de procesare al retelelor celulare neuronale omogene.
Cu toate ca multe dintre conceptele prezentate în teza îsi regasesc implementarea în realizarile actuale de circuit (mai ales cele prezentate în capitolele de analiza a stadiului actual al cercetarilor), aceasta nu îsi propune sa faca un studiu al posibilitatilor de procesare *strict* cu

[1] CNN reprezinta acronimul termenului *Cellular Neural Networks*, tradus prin Retele Neuronale Celulare
[2] Legaturile sunt realizate în cazul retelelor neuronale clasice prin intermediul asa-numitelor ponderi. Acestea realizeaza conectarea unei celule cu toate celelalte, urmând ca, în functie de problema studiata, unele dintre ele sa se dovedeasca inutile (nu se modifica în timpul procesului de antrenare)
[3] Functia de activare este în cazul retelelor neuronale celulare de tipul amplificare cu saturatie.
[4] Timpul mediu de procesare a unei imagini de catre acest chip este de 160 ns.

sistemele implementate în acest moment, ci îsi propune sa largeasca orizontul pentru analiza acestui tip de sisteme si proiectarea de instructiuni analogice asociate cu diverse tipuri de procesari de imagini. O posibila alternativa de folosire a rezultatelor teoretice obtinute consta în utilizarea lor la implementarea software a unor algoritmi bazati pe diverse structuri (realizate la nivel sistemic) a retelelor neuronale celulare.
Spre exemplu, una din întrebarile la care lucrarea de fata încearca sa dea un raspuns este daca, pentru realizarea unor procesari mai complicate de semnal, este necesar sa se mareasca aria de influenta directa asupra vecinilor a unitatii de procesare sau este mai eficient sa se mareasca ordinul de complexitate al unitatii de procesare? Pornind de la avantajul primordial al retelelor neuronale celulare fata de cele clasice, acesta se diminueaza odata cu cresterea ariei de influenta asupra vecinilor unei unitati de procesare.
Pe de alta parte, la cresterea complexitatii unitatii de procesare (celulei) numarul de tranzistoare necesare creste si prin urmare puterea consumata, aria si toti ceilalti parametrii prezentati mai sus se înrautatesc.
O alta abordare a unei procesari mai complicate de imagine este ca ea sa fie împartita functional în procesari simple, realizabile cu o celula si o arie de influenta directa a acesteia cât mai simple. Prin urmare si chip-ul necesar pentru aceste tipuri de procesari este eficient implementabil în tehnologie VLSI. Printr-o succesiune de procesari de semnal simple se poate obtine o procesare de semnal mai complicata.
La nivel de interfata software, succesiunea unor procesari simple efectuate asupra unei imagini. carora le corespund instructiuni analogice este de fapt un program realizat cu instructiuni analogice, ce se supune modelului de programare von Neumann. Din acest moment, odata stabilita structura chip-ului si a mediului integrat, folosirea acestora pentru realizarea unor procesari mai complicate de imagine, cum ar fi segmentarea orientata obiect se realizeaza prin scrierea unui program în limbaj Alpha (limbajul de nivel înalt proiectat special pentru acest tip de sisteme).

***

Atât ca student, cât si mai târziu, în calitate de cadru didactic si pe întreaga perioada de elaborare a lucrarii, am beneficiat de îndrumarea plina de întelegere, entuziasm si energie a domnului profesor Liviu Goras, caruia îi multumesc pentru modelul oferit cu generozitate.
Pentru discutii foarte utile pentru formarea mea profesionala purtate din studentie si dupa terminarea ei, pe toata perioada pregatirii tezei, tin sa multumesc colegilor din laboratorul de Semnale, Circuite si Sisteme al Facultatii de Electronica si Telecomunicatii din Iasi.
Pentru atmosfera de seriozitate, cooperare si sustinere pe care am simtit-o înca din studentie în Facultatea de Electronica si Telecomunicatii, vreau sa le multumesc tuturor cadrelor didactice din aceasta facultate.
Un rol aparte în formarea mea îl au parintii mei, care mi-au oferit de-a lungul timpului suportul (de toate felurile) pentru care le multumesc.

Capitolul 1.: Notatii de baza, definitii si teoreme semnificative

*Definitia 1**: Arhitectura CNN standard***

Arhitectura standard CNN [8-10] este constituita dintr-o matrice dreptunghiulara (MxN) de celule (unitati elementare de procesare), interconectate între ele prin intermediul *template*[5]-urilor (Fig. 1).

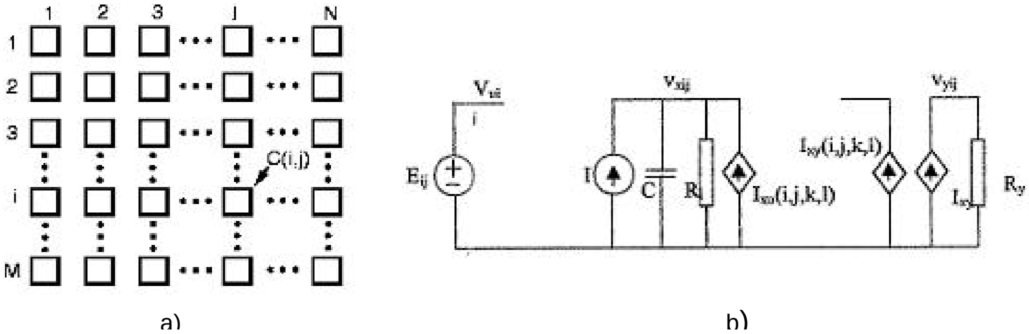


Fig. 1: a) Arhitectura CNN standard; b) O realizare standard de circuit pentru unitatea de procesare

*Definitia 2**: Sfera de influenta a celulei C(i,j)***

Sfera de influenta Sr(i,j), [10] de raza r a celulei C(i,j) este definita ca multimea tuturor celulelor vecine care satisfac proprietatea:

$$S_r(i,j) = \{C(k,l) \mid \max_{1\le k\le M,1\le l\le N} \{|k-i|,|l-j|\} \le r\} \tag{1.1.}$$

în care r este un întreg pozitiv.
Ne vom mai referi la Sr(i,j) ca la o vecinatate (2r+1)x(2r+1). De exemplu, Fig. 2a) prezinta o vecinatate r=1 (3x3). În Fig. 2b) se prezinta o vecinatate r=2 (5x5).

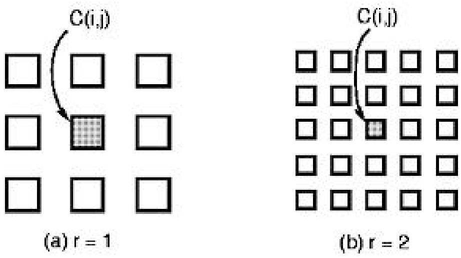


Fig. 2: a) Vecinatate simpla; b) Vecinatate dubla

*Definitia 3**: Celule obisnuite. Celule de frontiera***

O celula C(i,j) este numita celula obisnuita [10] dupa Sr(i,j) daca toate celulele vecine C(k,l) $\in$ Sr(i,j) exista. În caz contrar, C(i,j) este numita celula de frontiera.

*Definitia 4**: CNN-ul standard***

Clasa CNN-ului standard MxN [10] este definita de o matrice dreptunghiulara de celule C(i,j), unde indicii reprezinta pozitia celulei în cadrul matricii; i=1..M, j=1..N. Fiecare celula este descrisa matematic de relatiile:

Ecuatia de stare

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} A(i,j;k,l)y_{kl} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} B(i,j;k,l)u_{kl} + z_{ij} \tag{1.2.}$$

în care $x_{i,j} \in R$, $y_{kl} \in R$, $u_{kl} \in R$ si $z_{ij} \in R$ sunt denumite starea, iesirea, intrarea si pragul celulei C(i,j), iar A(i,j;k,l) si B(i,j;k,l) sunt denumite template-uri.

Ecuatia de iesire:

$$y_{ij} = f(x_{ij}) = \frac{1}{2}|x_{ij}+1| + \frac{1}{2}|x_{ij}-1| \tag{1.3.}$$

---

[5] Se va folosi în continuare termenul provenit din literatura de specialitate anglo-saxona pentru evitarea confuziilor. *Template*-ul reprezinta expresia matematica a influentei starilor si intrarilor corespunzatoare celulelor vecine asupra starii si intrarii corespunzatoare celulei curente.

Aceasta este denumita neliniaritatea standard [10]. În esenta, scopul ei este de a limita semnalele de la iesirea celulelor si de a realiza, în anumite cazuri “binarizarea” imaginilor dupa procesare:

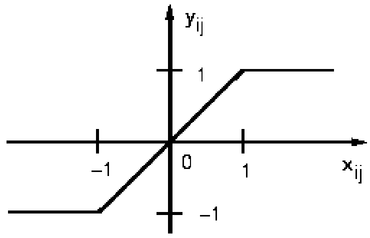


Fig. 3: Neliniaritatea standard

Cele doua ecuatii pun în evidenta faptul ca fiecare celula este influentata de iesirile celulelor vecine si de intrarile corespunzatoare celulelor vecine, prin intermediul template-urilor A si respectiv B.

Conditii de granita:

Conditiile de granita sunt date de comportarea unor celule din afara retelei de MxN celule parti *utile* în procesare.

Stare initiala:

$$x_{ij}(0), i=1,...,M, j=1,...,N \tag{1.4.}$$

Este util sa ne gândim la tripletul {A(i,j;k,l), B(i,j;k,l), z_{ij}} ca la un program elementar de simulare a CNN-urilor (o instructiune analogica) , pentru ca el descrie modul în care o imagine U sau chiar doua (U si Y), de dimensiune MxN la t=0, va fi transformata pentru a produce o imagine Y(t) (de iesire) de dimensiune MxN pentru t>0. Dupa un timp în general foarte scurt imaginea de iesire se stabilizeaza (în ipoteza ca sunt îndeplinite anumite conditii de stabilitate).

*Definitia 5**: CNN-ul invariant în spatiu (isotrop)***

Un CNN este invariant în spatiu [10] daca si numai daca operatorii-template si z_{ij} nu variaza în raport cu spatiul. În acest caz, se poate scrie:

$$\sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} A(i,j;k,l)y_{kl} = \sum_{|k-i|\le r} \sum_{|l-j|\le r} A(i-k,j-l)y_{kl}$$

$$\sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} B(i,j;k,l)u_{kl} = \sum_{|k-i|\le r} \sum_{|l-j|\le r} B(i-k,j-l)u_{kl} \tag{1.5.}$$

$$z_{ij}=z$$

Un CNN de clasa 2 standard [10] (cu template-uri liniare) are urmatoarea ecuatie de stare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ij} = -x_{ij} &+ \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} A(i,j;k,l)y_{kl} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} B(i,j;k,l)u_{kl} + z_{ij} \\ &+ \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} C(i,j;k,l)x_{kl} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} D(i,j;k,l)(u_{kl},x_{kl},y_{kl})\end{aligned} \tag{1.6.}$$

Ipoteze folosite pentru CNN-ul clasic:

- Operatorii sinaptici sunt liniari si fara memorie
- Intrarea $u_{ij}(t)$ si pragul (dat de sursele de curent) $z_{ij}(t)$ sunt functii continue de timp;
- Neliniaritatea f(x) este continua în sens Lipschitzian adica are proprietatea ca exista o constanta L în asa fel încât pentru orice x’ si x” apartinând multimii numerelor reale,

$$|f(x')-f(x'')|\le L\,|x'-x''|$$

Teorema 1 (Existenta si unicitatea solutiei)
În aceste ipoteze, pentru orice stare initiala $x_{ij}(0)$ apartinând lui R, CNN-ul are o solutie unica, pentru orice t>0.

Teorema 2 (Marginirea solutiei)

Pentru ipoteza în care se satisfac urmatoarele conditii $|x_{ij}(0)|\le 1$, $|u_{ij}(t)|\le 1$, $|z_{ij}(t)|\le z_{max}$, solutia $x_{ij}(t)$ a CNN-ului standard cu operatori sinaptici liniari si fara memorie este marginita uniform în sensul ca exista o constanta x_{max} astfel încât $|x_{ij}(t)| \le x_{max}$ $\forall t\ge 0$, $1\le i\le M$, $1\le j\le N$, în care x_{max} este dat de relatia:

$$x_{max} = 1 + z_{max} + \max_{\substack{0\le i\le M\\ 0\le j\le N}} \Big[\sum_{C(k,l)\in S_r(i,j)} \big(|A(i,j;k,l)| + |B(i,j;k,l)|\big)\Big]$$

Observatii:

a) Pentru CNN-uri invariante în spatiu $|x_{ij}(t)|$ este marginit de valoarea:

$$\hat{x}_{max} = 1 + z_{max} + \sum_{1\le k\le M} \sum_{1\le l\le N} |A_{kl}| + |B_{kl}| \qquad (1.7.)$$

b) Teorema 2 impune o tensiune de alimentare minima pentru oricare implementare de circuit a CNN-urilor si este fundamentala pentru proiectarea unui circuit integrat ce implementeaza un CNN.

*Definitia 6**: Ponderi excitatorii si inhibitorii***

Se spune ca o pondere (element al template-ului A) [10] a_{kl} este excitatoare (respectiv inhibitoare) daca este pozitiva, respectiv negativa. Aceasta se justifica prin faptul ca cele excitatoare determina cresterea functiei $h_{ij}(x_{ij},w_{ij})$ si deci a vitezei de crestere a lui $x_{ij}(t)$, pe când cele inhibitoare determina scaderea acestei viteze de crestere a starii.

Cazul cel mai general pentru CNN-ul standard, în care toate elementele template-urilor *pot fi* nenule este prezentat mai jos. Starea celulei din pozitia (i,j) este determinata de iesirile celulelor vecine si de intrarile corespunzatoare celulelor vecine (pixeli din imaginea de pe intrare cu indecsi corespunzatori celulelor vecine).

Rezulta astfel clasa de CNN standard notata cu C(A,B,z).

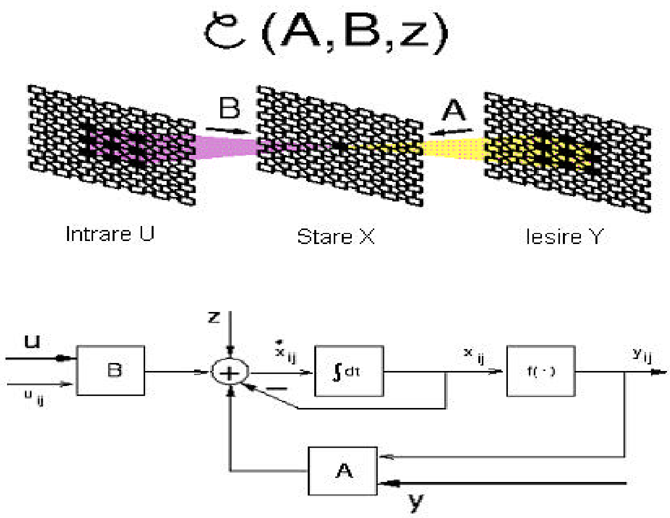


Fig. 4: a) Reprezentarea intuitiva a fluxului de date în CNN
b) Reprezentarea sistemica a unei celule din CNN

*Definitia 7**: Clasa cu reactie zero C(0,B,z)***

Un CNN apartine clasei C(0,B,z) [10] daca si numai daca celula este influentata numai de intrarile corespunzatoare celulelor vecine.

*Definitia 8**: Clasa CNN-urilor autonome C(A, 0, z)***

Un CNN apartine clasei C(A, 0, z) [10] daca si numai daca toate elementele apartinând template-ului de intrare sunt zero.

*Definitia 9**: Clasa CNN cu celule necuplate C(A^0, B, z)***

Un CNN apartine clasei cu celule necuplate C(A^0, B, z) daca si numai daca $a_{ij}=0$, pentru oricare i si j cu exceptia lui i=j.

Capitolul 2.: Functionarea CNN-ului cu celule de ordinul I ca filtru liniar spatial

O clasa de aplicatii ale CNN-ului în prelucrarea imaginilor consta în utilizarea retelei în zona liniar centrala a celulelor [24].

Functionarea CNN în regiunea central liniara a celulelor componente

Retelele neuronale celulare pot fi privite ca filtre spatiale liniare. În cazul în care în urma evolutiei valorilor variabilelor de stare asociate celulelor nu s-a intrat înca în neliniaritate avem $y_{i,j}=x_{i,j}$ pentru cazul 2D, care este cel mai general[6].
Se ia în discutie urmatoarea forma a sistemului de ecuatii ce descriu CNN-ul standard omogen (adica template-urile A, B si pragul z sunt aceleasi pentru orice pereche (i,j)):

$$\dot{x}_{ij(t)} = -x_{ij(t)} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} A(k,l)x_{kl} + \sum_{C(k,l)\in Sr(i,j)} B(k,l)u_{kl} + z \qquad (2.1.)$$

Se fac urmatoarele notatii:

$$a(n_1,n_2) = \begin{cases} A_{0,0}-1, & (n_1,n_2)=(0,0) \\ A_{-n_1,-n_2}, & -n_1,-n_2 \in N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \qquad (2.2.)$$

$$b(n_1,n_2) = \begin{cases} B_{-n_1,-n_2}, & -n_1,-n_2 \in N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Cu aceste notatii se poate deduce ecuatia care guverneaza dinamica CNN-ului de ordinul I:

$$\dot{x}_t(n_1,n_2) = a(n_1,n_2) * x_t(n_1,n_2) + b(n_1,n_2) * u(n_1,n_2) + z \qquad (2.3.)$$

Abordarea problemei în domeniul frecventelor spatiale

Solutia ecuatiei (2.3) se poate obtine utilizând Transformata Fourier Discreta (TFD) sau Transformata Cosinus Discreta (TCD) în functie de conditiile la limita cu care se lucreaza:

$$F(w_1,w_2) = \sum_{n_1}\sum_{n_2} f(n_1,n_2)e^{-jw_1n_1}e^{-jw_2n_2} \qquad (2.4.)$$

Câteva proprietati interesante pentru problematica de fata ale TFD sunt:

- daca f(n_1, n_2) este simetrica si reala, atunci si F(ω_1, ω_2) este simetrica si reala;
- f(0,0) deplaseaza suprafata F(ω_1, ω_2) în sus si în jos;
- TFD{f(n_1, n_2)*g(n_1, n_2)}=F(ω_1, ω_2) G(ω_1, ω_2);

În cazul în care se considera o retea discreta infinita, se poate scrie:

$$\dot{X}_t(w_1,w_2) = A(w_1,w_2)X_t(w_1,w_2) + B(w_1,w_2)U(w_1,w_2) + zd(w_1,w_2) \qquad (2.5.)$$

În cele ce urmeaza vom considera un CNN cu dimensiunile N_1xN_2 si conditii la limita periodice (caz în care se utilizeaza TFD) respectiv flux-zero (pentru care se utilizeaza TCD).
Toate consideratiile care urmeaza se refera la CNN-ul stabil. Pentru domeniul frecventa discretizat,

$$\dot{X}_t(k_1,k_2) = A(\frac{2pk_1}{N_1},\frac{2pk_2}{N_2})X_t(k_1,k_2) + B(\frac{2pk_1}{N_1},\frac{2pk_2}{N_2})U(k_1,k_2) + zd(k_1,k_2) \qquad (2.6.)$$

cu

$$w_1 = \frac{2pk_1}{N_1} \quad si \quad w_2 = \frac{2pk_2}{N_2} \qquad (2.7.)$$

[6] Cazul 1D se poate obtine eliminând un indice al variabilelor de tip semnal

Pentru cazul în care se lucreaza cu TCD, se obtine un set de relatii asemanatoare:

$$\dot{X}_t(k_1,k_2) = A(\frac{pk_1}{N_1},\frac{pk_2}{N_2})X_t(k_1,k_2) + B(\frac{pk_1}{N_1},\frac{pk_2}{N_2})U(k_1,k_2) + zd(k_1,k_2) \quad (2.8.)$$

cu:

$$w_1 = \frac{pk_1}{N_1} \quad si \quad w_2 = \frac{pk_2}{N_2} \quad (2.9.)$$

Solutia în timp

Vom scrie solutia în domeniul timp cu frecventa neexplicitata (variabila analogica) pentru a nu opta in acest moment in mod necesar pentru una din TFD sau TCD:

Când $A(v_1,v_2) \neq 0$:

$$X_t(v_1,v_2) = e^{A(v_1,v_2)t}X_0(v_1,v_2) + \frac{1}{A(v_1,v_2)}\left[e^{A(v_1,v_2)t} - 1\right]B(v_1,v_2)U(v_1,v_2) \quad (2.10.)$$

Când $A(v_1,v_2) = 0$:

$$X_t(v_1,v_2) = X_0(v_1,v_2) + tB(v_1,v_2)U(v_1,v_2) \quad (2.11.)$$

Pentru a face notatiile mai simple si mai intuitive, s-a abandonat punerea în evidenta a termenului care tine de sursele de curent constant. Acest termen se poate include în termenul excitatie.

Functionarea CNN-ului stabil în regiunea central liniara

Filtrarea liniar spatiala a semnalului excitatie

În cazul în care pentru toate perechile (ω_1,ω_2) este valabila relatia[7]:

$$\mathrm{Re}(A(w_1,w_2)) < 0 \quad (2.12.)$$

atunci sistemul liniar central este stabil, iar exponentialele corespunzatoare fiecarui mod vor descreste în timp.
Punctul de echilibru stabil, care este independent de conditia initiala se poate scrie:

$$X_\infty(w_1,w_2) = H(w_1,w_2)U(w_1,w_2) \quad (2.13.)$$

în care functia de transfer H(ω_1, ω_2) este:

$$H(w_1,w_2) = \frac{-1}{A(w_1,w_2)}B(w_1,w_2) \quad (2.14.)$$

Se recunoaste în relatia (2.14) o functie de transfer a unui filtru IIR.
Cel mai simplu filtru care se poate imagina folosind CNN-ul este cel în care se utilizeaza pentru filtrare doar template-ul B.
Daca exista doar element central în template-ul A, si acesta este o constanta $\gamma < 1$, atunci functia de transfer pentru aceasta situatie are forma:

$$H(w_1,w_2) = \frac{-1}{g-1}B(w_1,w_2) \quad (2.15.)$$

Când se alege si γ=0, se obtine un filtru FIR corespunzator template-ului B.

Filtrarea liniara spatiala variabila în timp

În cazul în care CNN-ul este excitat prin conditii initiale, evolutia starii este data de ecuatia:

$$X_t(w_1,w_2) = H(w_1,w_2)X_0(w_1,w_2) \quad (2.16.)$$

---

[7] Se recunoaste în relatia respectiva valorile proprii temporale ale sistemului si se foloseste definitia stabilitatii dupa Lyapunov

unde:

$$H(w_1, w_2) = e^{A(w_1, w_2)t} \quad (2.17.)$$

CNN-ul se comporta ca un filtru spatial variabil in timp.

Functionarea CNN-ului instabil în regiunea central liniara

Sistemul liniar central este instabil, daca exista cel putin o pereche (ω_1, ω_2) pentru care:

$$\mathrm{Re}(A(w_1, w_2)) > 0 \quad (2.18.)$$

Dinamica CNN-ului autonom instabil

În esenta, diferenta fata de CNN-ul stabil consta în aceea ca, datorita instabilitatii, unele moduri spatiale pot creste în timp.
Se obtin aceleasi relatii ca în cazul filtrarii liniare spatiale în timp cu mentiunea ca în acest caz sistemul este instabil. Acest caz va fi îndelung discutat pentru CNN-ul format din celule de ordin superior si template-uri de ordin superior (cu r>1), prezentându-se o serie de metode de proiectare pentru aceste cazuri. Cazul CNN-ului cu celule de ordinul I va fi privit ca o particularizare a acestor cazuri, în acest capitol realizându-se doar o analiza a CNN-ului standard omogen. În acest caz avem de a face cu o "filtrare liniara functionala" variabila în timp dar numai pâna în momentul în care prima celula intra în neliniaritate [24,25], adica variabila de stare "trece" printr-o functie neliniara de tip amplificare cu saturatie.

Capitolul 3.: Functionarea neliniara a CNN-ului standard. Strategii pentru proiectarea de template-uri. Proiectare robusta

Scopul proiectarii unui template este de a obtine o prelucrare impusa a imaginilor. De exemplu, extragere de contururi, segmentare, etc.
Exista trei metode de proiectare a template-urilor [26-44]:

- metoda intuitiva;
- metoda învatarii;
- deducerea directa de template-uri.

Metoda intuitiva cere judecata intuitiva a proiectantului. Necesita experienta în procesare de imagini si dinamica retelelor.

Metoda învatarii – se bazeaza pe:

- perechi intrare – iesire;
- în unele cazuri nu exista template-ul pentru o problema data;
- câteva metode de învatare propuse au fost testate sa fie eficiente pentru câteva template-uri binare intrare – iesire. Atâta timp cât cea mai mare parte dintre aceste template-uri pot fi deduse direct, valoarea acestei metode poate fi pusa la îndoiala. În aceste cazuri acolo unde nu este o iesire dorita explicita, proiectarea directa de template-uri este imposibila. Segmentarea texturilor este un exemplu bun în acest sens.

Deducerea directa de template-uri – poate fi aplicata acolo unde procesarea dorita poate fi descrisa la nivel local în mod exact. Metodele de proiectare depind de clasa de CNN particulara (C(A,B,z), C(0,B,z), etc). În timp ce cu primele doua metode rezulta câteva template-uri valide, aceasta metoda permite alegerea celei mai robuste solutii dintr-o multime de solutii. Mai mult, aceasta metoda este "ieftina" computational.

Template-uri CNN necuplate

Forma generala a unui astfel de template este:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{-1-1} & b_{-10} & b_{-11} \\ b_{0-1} & b_{00} & b_{01} \\ b_{1-1} & b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} \quad z = i \quad (3.1.)$$

Pentru acest tip de template, sistemul lucreaza ca o retea de celule independente. Prin urmare, studiul comportarii dinamicii unei singure celule este suficient pentru a trage concluziile asupra comportarii întregii retele.
O celula primeste noua intrari fixe de la celulele vecine. Are o conditie initiala x(0) care poate fi considerata a zecea intrare. Prin urmare, se implementeaza o functie de tipul 10 intrari si o iesire.

Ecuatia de stare a unei singure celule are expresia:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + a_{00}y(t) + s, \quad s = \sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} B_{ij,kl}u_{kl} + z, \quad y = f(x) \qquad (3.2.)$$

Parametrul s este evident o constanta, dat fiind faptul ca depinde de template si de intrarea în CNN (nu se ia în calcul intrarea variabila în timp). Forma functiei f(x) este data în Fig. 3.

Reguli de proiectare în contextul CNN cu celule necuplate

Regula 1: $a_{00}=0$, rezulta $y_\infty=f(s)$
Regula 2: $a_{00}=1$, rezulta ca CNN-ul este un integrator atâta timp cât modulul lui x este
Regula 3: $a_{00}>1$, iesirea este tot timpul binara, datorita buclei de reactie pozitiva. Iesirea depinde de starea x(0) si de contributia lui s. Sunt trei cazuri de importanta practica:

3a) x(0)=0, rezulta y(0)=0. Iesirea depinde de semnul lui s în felul urmator: $y_\infty=\mathrm{sign}(s)$;

3b) x(0)=1, rezulta y(0)=1. Iesirea finala:
- ramâne 1, daca $a_{00}+s>1$;
- se schimba în –1 daca $a_{00}+s<1$.

3c) x(0)=-1, rezulta y(0)=-1. Iesirea finala:
- ramâne –1 daca $-a_{00}+s<-1$;
- se schimba în 1 daca $-a_{00}+s>-1$.

3d) $x(0)=x_0$, modulul lui x_0 subunitar, rezulta ca $y(0)=x_0$,

$y_\infty=\mathrm{sign}(dx/dt(x=x_0))=\mathrm{sign}(a_{00}x_0-x_0+s)=\mathrm{sign}((a_{00}-1)x_0+s)$. Aceasta regula este generalizarea celor doua de mai sus.
Observatie: $a_{00}+s=1$ si $-a_{00}+s=-1$ trebuie evitate tinând seama de erorile implicate în realizarea analogica.
În deducerea template-urilor exista o prima etapa în care se deduce forma acestora (adica parametrii independenti si pozitiile lor în template) si o a doua, în care se deduc în urma rezolvarii unui sistem de inecuatii valorile parametrilor template-urilor.

Template-uri pentru prelucrari binare

În aceasta categorie intra prelucrarea imaginilor formate din pixeli albi si negri. Fiind în cadrul clasei de CNN-uri necuplate, se vor folosi pentru prezentarea urmatoarelor clase de prelucrari de imagine regulile prezentate mai sus.

Metoda de proiectare a template-urilor pentru procesari binare pe intrare binara:
Metoda este ilustrata în figura:

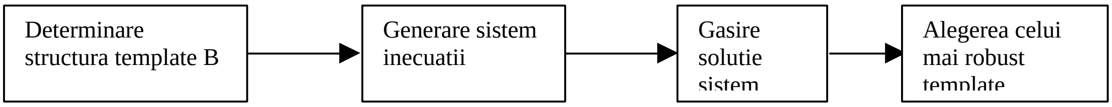


Fig. 5: Metoda de proiectare a template-urilor pentru procesari binare pe intrare binara

Determinarea formei template-ului B este cea mai importanta operatie. Prin aceasta se realizeaza reducerea spatiului parametrilor care are initial dimensiunea 11. Uzual dimensiunea acestui spatiu al parametrilor template-ului se reduce la 3, 4.
Generarea sistemului de inecuatii se face tinând cont de procesarea ce trebuie facuta si de regulile mai sus mentionate.
Rezolvarea sistemului de inecuatii presupune intersectia regiunilor hiperspatiului care satisfac toate inecuatiile sistemului. Daca nu exista nici o regiune comuna, atunci procesarea nu se poate face cu ajutorul template-urilor liniare.
Alegerea celui mai robust template. Cel mai robust template este cel care corespunde regiunii din mijlocul portiunii de hiperspatiu determinate.
Au fost grupate principalele template-uri în trei clase:

Clasa 1: Extragere de forme[8].

Acest grup de template-uri extrage forme bine definite. Când se descrie o problema, se determina o masca 3x3 si un numar întreg. Masca binara contine pixeli negrii, pixeli albi si pixeli care nu conteaza.

[8] Forme este traducerea englezescului *pattern*

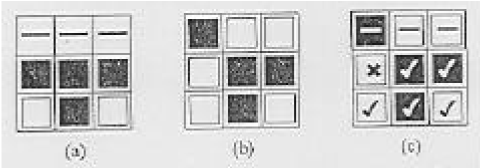


Fig. 7: Reguli locale pentru extragerea de trasaturi
a) masca; b) imagine de test; c) potrivirea mastii pe imaginea de test

Numarul întreg reprezinta numarul minim de pozitii ale mastii (Fig. 7a) care ar trebui sa se potriveasca pe o regiune din imagine (Fig. 7b) pentru a extrage (schimba în negru) pixelul central din aceasta. Cu alte cuvinte, iesirea este neagra în acele pozitii unde sunt cel putin "prag" pixeli care se potrivesc cu forma dorita. În Fig. 7c se prezinta modul în care masca se potriveste pe o regiune de 3x3 pixeli din imaginea-sursa.

Clasa 2: Modificare conditionala de pixel

Daca la clasa anterioara se construia o imagine la iesire bazata pe o imagine de la intrare, imaginea de la iesire putând fi însa mult diferita fata de cea de la intrare, aici imaginea de pe iesire este apropiata de imaginea sursa, folosita ca intrare în CNN, doar câtiva pixeli fiind schimbati.
În cazul unui template FUNCTIONAL ASIMETRIC (z este nenul) ori se schimba câtiva pixeli negrii în pixeli albi, ori invers. Niciodata nu se schimba si cei albi în negrii si cei negrii în albi.
În cazul unui template FUNCTIONAL SIMETRIC (z=0), daca se satisface o conditie[9], pixelii negrii se schimba în pixeli albi iar daca opusul conditiei este satisfacuta, pixelii albi devin pixeli negrii. Pixelii din regiunile în care nu este satisfacuta conditia nu se schimba.
Aici se dau ca date de intrare: o masca binara, un prag (numar întreg) si o regula prin care fie pixelii negrii se schimba în pixeli albi, fie invers.

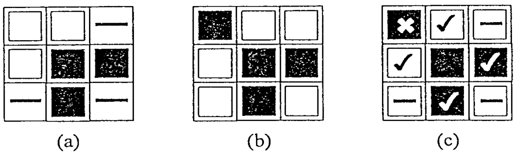


Fig.8: Reguli locale
a) masca; b) imagine de test; c) potrivirea mastii pe imaginea de test

Clasa 3: Functii de doua intrari

Partea care individualizeaza aceasta clasa este ca intrarea si starea initiala a CNN-ului sunt diferite, adica apare o intrare în plus. Numarul total de pixeli care au efect asupra iesirii este 10 (în loc de 9) deoarece în acest caz, pe lânga imaginea introdusa pe intrarea CNN, se mai introduce o imagine si pe stare. La acest moment se reaminteste ca este vorba de CNN-uri necuplate. Prin urmare numai pixelul corespunzator pozitiei curente din imaginea introdusa pe stare va interveni în ecuatia de functionare a celulei din acea pozitie. Acest pixel este al zecelea ce intervine (functional) ca intrare în celula curenta.
Imaginea cu care este initializata variabila de stare poate fi folosita (functional) ca o masca de selectie, ce are rol de validare a unei procesari efectuate asupra imaginii introduse pe intrare pe pozitiile selectate de masca.
Se pot folosi pentru imaginile constituite de intrari prelucrarile din clasele 1 si 2. Imaginea rezultata si starea initiala pot fi combinate logic, adica, spre exemplu, acest lucru înseamna ca se poate extrage o forma anume din imaginea de intrare, dar pixelii negri extrasi apar numai în acele pozitii în iesirea finala unde starea initiala a fost negru.

Template-uri pentru CNN-uri cu celule cuplate

Schimbarile în iesirile celulelor afecteaza vecinii si invers, adica mai multe elemente ale template-ului A sunt diferite de zero (clasa C(A,B,z)). Dinamica este descrisa de ecuatia:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} A_{ij,kl}\, y_{kl}(t) + s,\quad s = \sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} B_{ij,kl}\, u_{kl} + z,\quad y = f(x) \tag{3.3.}$$

Parametrul s este evident o constanta, dat fiind faptul ca depinde de template si de intrarea în CNN (pentru intrare care nu variaza în timp). Forma functiei f(x) este data în Fig. 3:
O particularitate importanta a CNN-urilor cuplate este faptul ca, în anumite cazuri poate avea loc fenomenul de propagare. Problemele care se pun pentru aceasta clasa de CNN-uri sunt:

- cum are loc propagarea?
- cum se poate controla propagarea cu un template proiectat?

[9] Conditia este una de tipul “un numar de pixeli se potrivesc peste o masca”

În continuare se prezinta câteva notiuni pregatitoare:
În timpul analizei regimului tranzitoriu într-o retea (CNN) la fiecare moment putem separa celulele în *setul activ* si *setul inactiv*.

Celule inactive – o celula este considerata inactiva daca la un moment dat iesirea sa este *stabilizata* la o valoare. O celula inactiva trebuie sa se gaseasca în regiunea de saturatie pentru ca, datorita buclei pozitive, (a_{00}>1) celula nu se poate afla în punct de echilibru stabil în regiunea liniara.
Analizând caracteristica celulei, se poate spune ca o celula este stabila în regiunea de saturatie pozitiva daca: $\sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} A_{ij,kl}\, y_{kl}(t) + s > 1$
si stabila în regiunea de saturatie negativa daca: $\sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} A_{ij,kl}\, y_{kl}(t) + s < -1$

Celule active – este considerata activa o celula a carei iesire se schimba la un moment dat. O celula activa este tot timpul în regiunea liniara sau (în cazul nostru) trece dintr-o regiune de saturatie în alta.

Analiza unui regim tranzitoriu:

La inceput, sunt câteva celule active. În caz contrar, nu exista regim tranzitoriu. În timpul regimului tranzitoriu o celula poate deveni activa daca si numai daca unul dintre vecinii directi o activeaza. Daca o celula este activa, iesirea sa se schimba în timp, adica termenul

$$\sum_{C(k,l)\in N_r(i,j)} A_{ij,kl}\, y_{kl}(t) + s \qquad (3.4.)$$

determinat de vecini se schimba. Prin urmare, o celula inactiva nu poate deveni activa daca nu are nici un vecin activ. La sfârsitul regimului tranzitoriu, toate celulele sunt inactive.

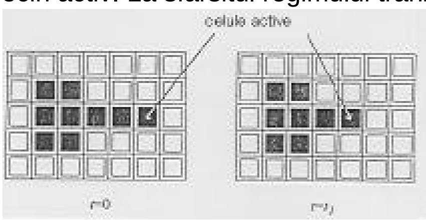


Fig. 9: Exemplu de regim tranzitoriu

Familie de masti– se refera la propagarea condusa prin mai multe masti.

Masca de activare binara – acea masca ce activeaza celula din pozitia centrala. În acest caz, unda de propagare se poate deplasa în orice directie.

Exemplu 1

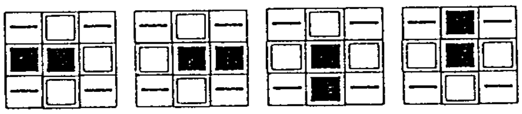


Fig. 10: Familie de masti

Regula corespunzatoare familiei de pattern-uri este aceea ca: pe o vecinatate tetraconectata sa se schimbe pixelul din mijloc daca exista cel putin trei vecini albi.
Exemplu 2: propagare condusa printr-o singura masca – directia de propagare este determinata strict de masca de activare binara (vezi figura de mai jos).

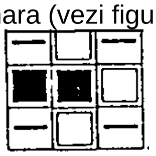
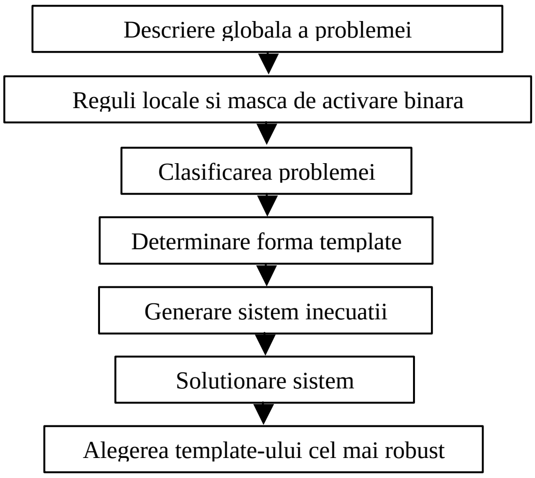


Fig. 11: Propagare condusa printr-o singura masca

Regula corespunzatoare propagarii conduse printr-o singura masca: data fiind masca de activare binara, sa se schimbe pixelii negrii care au în vecinatatea lor aceeasi masca ca si cel de fata (asimetria determina directia de propagare). Pentru masca din Fig. 11, este valabila propagarea ilustrata în Fig. 9. Masca respectiva serveste la deducerea template-urilor cu ajutorul carora se realizeaza stergerea liniilor orizontale intr-o imagine binara.
Propagare simetrica – propagare asimetrica: o propagare este simetrica daca afecteaza pixelii negrii în acelasi mod în care îi afecteaza pe cei albi.
Un template de propagare este simetric daca z este nul.
Propagare controlata – propagare necontrolata: in cazul propagarii controlate intrarea contine o *imagine-masca*. Aceasta imagine-masca limiteaza propagarea. De exemplu,

propagarea poate trece peste zonele care sunt negre în imaginea de intrare. Daca propagarea este controlata, template-ul B este nenul.

Etapele de proiectare pentru template-uri de tip propagare sunt:



Descrierea globala a problemei consta în descrierea verbala a problemei în asa fel încât pentru un semnal de intrare arbitrar sa se poata deduce iesirea.

Reguli locale si masca de activare binara – deducerea regulilor locale din descrierea globala.

Clasificarea problemei stabileste daca propagarea este arbitrara sau orientata, simetrica sau nesimetrica, controlata sau necontrolata.

În cadrul determinarii formei template-ului, a_{00} se adopta întotdeauna ca parametru independent. Se noteaza cu a. Pixelii care nu conteaza "ocupa" un parametru separat. Pixelii albi si cei negri au semne opuse.

Daca propagarea este controlata (template controlat) trebuie introdusi noi parametrii independenti la template-ul B, conform cu masca de activare. În cele mai multe cazuri, este vorba de un singur parametru independent în centrul template-ului B. Uneori însa pot fi mai multi în vecinatatea pixelului central. Daca procesarea este asimetrica (propagare asimetrica), parametrul z din template aduce un alt parametru liber.

Capitolul 4.: Aplicatii ale CNN de ordinul I si template de ordin maxim r=2

În acest capitol se va prezenta un set de prelucrari de imagini realizate cu ajutorul CNN-ului, functionând atât în zona central liniara a celulelor cât si în zona de dupa saturatie a caracteristicii neliniare a celulelor. Se va începe prezentarea cu clasa de prelucrari de imagini realizata cu ajutorul CNN-ului functionând în zonele de saturatie ale caracteristicilor celulelor, la care se aplica tehnicile de proiectare de template prezentate în capitolul anterior.

Functionarea CNN-ului ca filtru spatial neliniar

În continuare se vor exemplifica o serie de prelucrari de imagini clasice sau mai putin clasice, facându-se mentiunea ca s-a dorit mai mult o exemplificare si nu o privire care sa cuprinda toate prelucrarile de imagine ce se pot realiza cu acest tip de sistem. Câteva esantioane de prelucrari de imagini tipice, sunt prezentate in continuare:

Prelucrari de imagini de baza

Detector de componente conectate pe diagonala

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z = 0$$

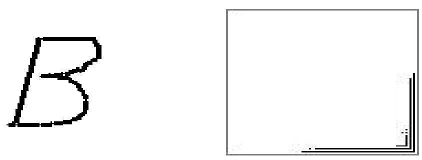


Fig. 12 a) Imagine sursa (initializare pe stare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U arbitrar
Stare initiala:	X(0)=P
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara care arata numarul de componente conectate pe diagonala în P. Pe baza acestei informatii s-a realizat recunoasterea de caractere (OCR)

Detector de contururi pe imagini binare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad z = -1$$

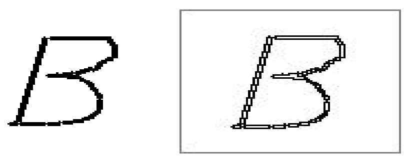


Fig. 13 a) Imagine sursa (initializare pe intrare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U(t)=P
Stare initiala:	X(0)=arbitrar
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara în care singurii pixeli negrii apartin marginii obiectului

Sterge pixeli negri izolati

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad z = -1$$

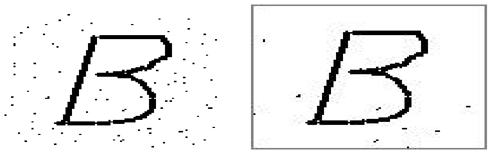


Fig. 14 a) Imagine sursa (initializare pe intrare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U(t)=P
Stare initiala:	X(0)=arbitrar
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara în care pixelii negrii apartin obiectului si obiectelor mai mari de un pixel

Morfologie matematica binara

Dilatare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad z = 2$$

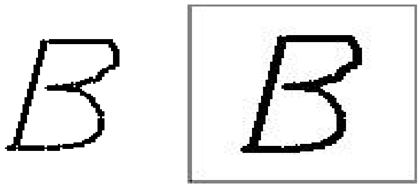


Fig. 15 a) Imagine sursa (initializare pe intrare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U(t)=P
Stare initiala:	X(0)=arbitrar
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara dilatata cu un pixel fata de imaginea de pe intrare

Erodare

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z = -2$$

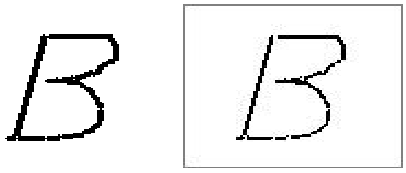


Fig. 16 a) Imagine sursa (initializare pe intrare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U(t)=P
Stare initiala:	X(0)=arbitrar
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara erodata cu un pixel fata de imaginea de pe intrare

Prelucrare logica de imagini

LogicAND

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z = -1$$

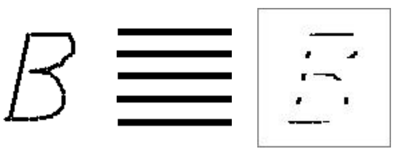


Fig. 17 a) Imagine sursa1 b) Imagine sursa2
c) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P1 si P2
Intrare:	U(t)=P1

Stare initiala:	X(0)=P2
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara care corespunde rezultatului aplicarii operatorului logic SI asupra lui P1 si P2

LogicNOT

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z = 0$$

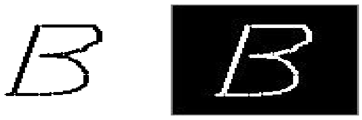


Fig. 18 a) Imagine sursa (initializare pe intrare)
b) Imagine dupa prelucrare (stare finala)

Se da:	imaginea binara statica P
Intrare:	U(t)=P
Stare initiala:	X(0)=arbitrar
Conditii de granita:	zero pentru toate celulele virtuale
Iesirea:	Y(t)->Y(inf) este o imagine binara care corespunde rezultatului aplicarii operatorului logic NEGARE asupra lui P

În cele ce urmeaza se prezinta un exemplu pentru functionarea CNN-ului ca filtru liniar spatial

Functionarea CNN-ului ca filtru spatial liniar

Exemplu de proiectare al unui filtru trece jos [24,25]

S-au folosit în acest exemplu template-uri simetrice, care conduc la functii de transfer reale. Template-urile de mai jos sunt obtinute printr-un proces de minimizare a unei functionale care depinde de 12 parametri (se lucreaza cu template-uri cu simetrie circulara), Procedeul este preluat de la sinteza filtrelor liniare. În acest caz locul timpului este luat de spatiu si se vorbeste despre frecvente spatiale. Evident, este vorba despre sisteme liniare stabile.

```
A=[-0.1137 -0.4549 -0.6823 -0.4549  -0.1137;
   -0.4549  0.3399  1.5896  0.3399  -0.4549;
   -0.6823  1.5896 -6.5380  1.5896  -0.6823;
   -0.4549  0.3399  1.5896  0.3399  -0.4549;
   -0.1137 -0.4549 -0.6823 -0.4549  -0.1137];
```

```
B=[0.0515 0.2059 0.3089 0.2059 0.0515;
   0.2059 0.3623 0.3127 0.3623 0.2059;
   0.3089 0.3127 0.7136 0.3127 0.3089;
   0.2059 0.3623 0.3127 0.3623 0.2059;
   0.0515 0.2059 0.3089 0.2059 0.0515];
```

Modulul functiei de transfer de tip trece-jos pentru template-ul dat mai sus:

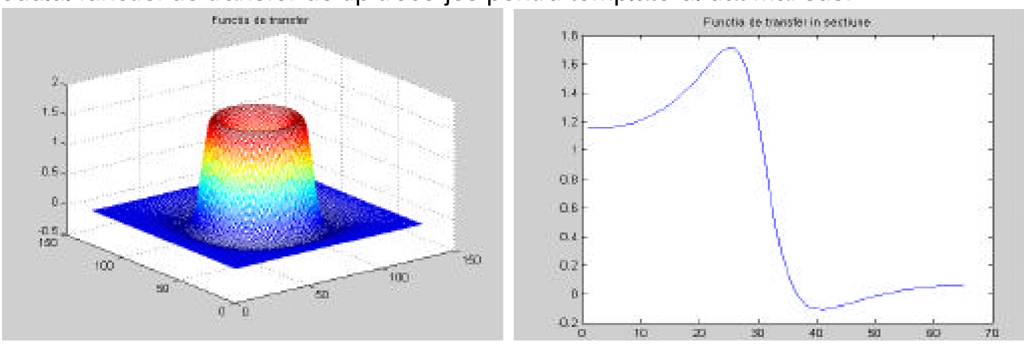
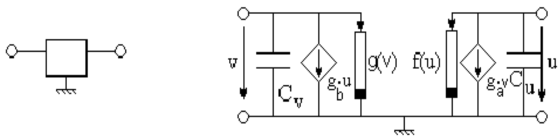


Fig.19: Exemplu de filtru trece jos a) Modulul functiei de transfer; b) Sectiune

Capitolul 5.: O arhitectura generala de circuit pentru celula de ordinul II

În acest capitol se prezinta o serie de rezultate referitoare la o arhitectura speciala de CNN, constând din celule de tip diport de forma celei prezentate în Fig. 20.



$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \dfrac{1}{C_u}(-f(u) - g_a v) = F(u,v) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{1}{C_v}(-g_b u - g(v)) = G(u,v) \end{cases} \tag{5.1.}$$

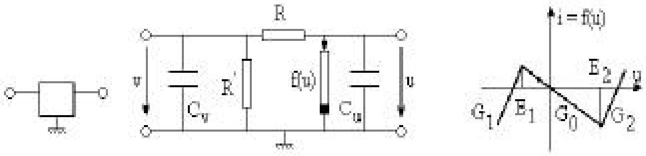
Fig 20: Structura generala a celulei de ordinul II

Termenii neliniari f(u) si g(v) pot fi în general de orice forma, dar este preferabil sa fie de tip liniar pe portiuni [53-55], ca în Fig. 21 si 22. Prin liniarizare în jurul unui punct de functionare se obtin ecuatiile:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = g(f_u u + f_v v) \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = g(g_u u + g_v v) \end{cases} \qquad f_u = -\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{(U_0,V_0)} \quad f_v = -g_a \quad g_u = -\frac{C_u}{C_v} g_b$$
$$g_v = -\frac{C_u}{C_v}\left(\left.\frac{\partial G}{\partial v}\right|_{(U_0,V_0)}\right) \quad g = \frac{1}{C_u} \tag{5.2.}$$

Exemple de structuri de celule particulare

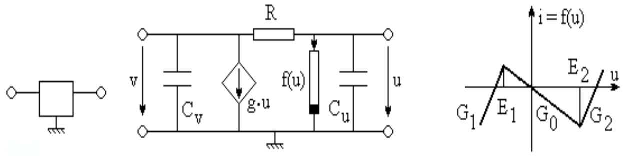
Celulele de tip diport din literatura [53-77] pot fi considerate cazuri particulare ale celulei din Fig. 20. Astfel, celula Chua [53-55] simplificata de (ordin II) are configuratia din Fig. 21:



$$f_u = -\frac{|C_u|}{C_u}G_i,\quad f_v = \frac{|C_u|}{C_u},\quad g_u = \frac{|C_u|}{C_v},$$
$$g_v = -\frac{|C_u|}{C_v}\left(1+\frac{G'}{G}\right)\qquad g = \frac{1}{|C_u|} \tag{5.3.}$$

Fig 21: Celula Chua simplificata

O alta celula propusa în [56] este prezentata în Fig. 34:



$$f_u = -(G+G_0)\quad f_v = G\quad g_u = \frac{C_u}{C_v}(G-g)$$
$$g_v = -\frac{C_u}{C_v}G\quad g = \frac{1}{C_u} \tag{5.4.}$$

Fig 22: Versiune a celulei generale

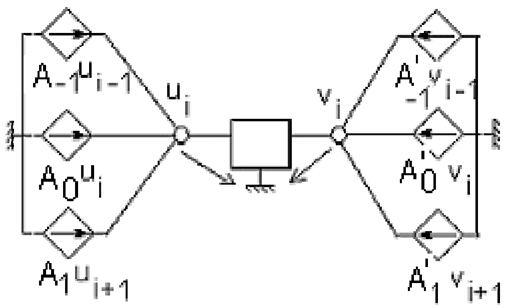
În Capitolul 6. se prezinta limbajul Alpha. Nu se insista în rezumat.

Capitolul 7.: Studiul retelei neuronale celulare 1D formate din celule de ordinul II conectate cu o vecinatate de raza unitate

Prin interconectarea folosind surse comandate sau retele rezistive, pe *doua straturi,* [53-55] a portilor similare prezentate în capitolul precedent se obtine un sistem autonom a carui functionare în zona liniara centrala a celulelor liniare pe portiuni sa poata realiza o procesare de semnal utila.

Interconexiunile

Un mod de a realiza o procesare de semnal este de a interconecta celulele într-o retea dublu cuplata care le leaga prin intermediul unor surse de curent comandate în tensiune. Tensiunile corespunzatoare portilor u si v au fost notate, pentru celula i, cu u_i si v_i. Fiecare celula este conectata cu celulele vecine din stânga si dreapta.



$$O_{1D}(u_i) = A_{-1}u_{i-1} + A_0u_{i+1} + A_1u_i$$
$$O_{1D}(v_i) = A'_{-1}v_{i-1} + A'_0v_{i+1} + A'_1v_i \tag{7.1.}$$

Fig 23: Interconexiunile în CNN

Parametrii A_{-1}, A_0, A_1 si respectiv A'_{-1}, A'_0, A'_1 sunt template-uri. Se presupune pentru generalitate ca cele doua straturi au template-uri diferite. Un caz particular este acela în care $A_{-1}= A'_{-1}$ si $A_1=A'_1$ (template-uri identice pe cele doua straturi).

Template-uri asimetrice si template-uri simetrice

Expresia operatorului de interconexiune este dat in ecuatia 7.1:

Dupa cum s-a specificat si mai sus, template-urile corespunzatoare celor doua straturi sunt în general diferite. Este simetric un template pentru care parametrii A_{-1} si A_1 sunt egali.

În cele ce urmeaza se prezinta câteva tipuri de conditii la limita (de granita). Se va studia un CNN cu M celule.

Conditii de granita

Conditiile de granita se refera la modul în care se conecteaza celulele de la extremitatile CNN-ului [59, 60, 64, 65]. Aceste celule au indecsii –1 si respectiv M.

Cel mai general caz este acela în care nu exista celule de granita, adica acel caz în care se studiaza un CNN infinit. În cazul particular în care se vorbeste de semnale periodice (analoage regimului permanent din cazul semnalelor temporale) CNN-ul infinit va fi înlocuit cu un CNN care prezinta asa-zisele conditii de granita periodice. Acest lucru implica faptul ca lungimile de unda ale armonicilor sunt submultiplii ai dimensiunii CNN. Este posibila co-existenta mai multor tipuri de conditii de granita pe straturile u si respectiv v. Conditiile de granita sunt descrise prin intermediul seturilor de ecuatii:

tip periodic (inel)	*tip zero-flux*	*tip anti-zero-flux*
$u(-1,t)=u(M-1,t),$ $u(0,t)=u(M,t)$	$u(-1,t)=u(0,t),$ $u(M,t)=u(M-1,t)$	$u(M,t)=-u(M-1,t),$ $u(-1,t)=-u(0,t)$

tip zero	*tip quasi-zero flux*
$u(-1,t)=0,$ $u(M,t)=0$	$u(-1,t)=u(1,t),$ $u(M,t)=u(M-2,t)$

Ecuatii si solutie

Forma generala a ecuatiilor

Forma generala a ecuatiilor care descriu functionarea sistemului format din celule de ordinul 2, dublu cuplate este [53-56, 69-77]:

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = F(u_i, v_i) + D_u O_{1D}(u_i) & i = 0..M-1 \\ \dfrac{dv_i(t)}{dt} = G(u_i, v_i) + D_v O_{1D}(v_i) \end{cases} \tag{7.2.}$$

S-au introdus fata de ecuatiile (5.1) termenii corespunzatori legaturilor celulei ce are indicele i cu celulele vecine (influenta operatorului O_{1D}).
Pentru studiul stabilitatii sistemului, acesta se liniarizeaza în jurul unui punct de echilibru (uzual originea). Se obtine în acest fel urmatorul sistem format din 2M ecuatii:

$$\begin{cases} \dfrac{du_i(t)}{dt} = g(f_u u_i + f_v v_i) + D_u O_{1D}(u_i) & i = 0..M-1 \\ \dfrac{dv_i(t)}{dt} = g(g_u u_i + g_v v_i) + D_v O_{1D}(v_i) \end{cases} \tag{7.3.}$$

în care parametrii f_u, f_v, g_u, g_v sunt elementele Jacobianului corespunzator sistemului liniarizat.

Rezolvarea ecuatiilor

Tehnica de decuplare

Solutionarea sistemului consta în utilizarea unei schimbari de variabila [53-55]:

$$\begin{cases} u_i = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi_M(m,i)\hat{u}_m & i = 0..M-1 \\ v_i = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi_M(m,i)\hat{v}_m \end{cases} \tag{7.4.}$$

unde $F_M(m,i)$ sunt functii spatiale ortogonale în raport cu produsul scalar.
Relatiile de inversiune sunt:

$$\begin{cases} \hat{u}_m = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi^*{}_M(m,i)u_i & i = 0..M-1 \\ \hat{v}_m = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi^*{}_M(m,i)v_i \end{cases} \tag{7.5.}$$

Cel mai general caz cu care se va lucra este acela în care functiile $F_M(m,i)$ sunt de forma [69-77]:

$$\Phi_M(w(m), j(m), i) = e^{j(w(m)i + j(m))} \tag{7.6.}$$

Acestea sunt functii proprii ale operatorului O_{1D}:

$$O_{1D}(\Phi_M(w(m), j(m), i)) = K_{1D}(m)\Phi_M(w(m), j(m), i) \tag{7.7.}$$

Înlocuind în sistemul de ecuatii (7.2) relatiile (7.4) si (7.7) si facând produs scalar se obtine

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{u}}_m(t) \\ \dot{\hat{v}}_m(t) \end{bmatrix} = \left(g \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1D}(m)D_u & 0 \\ 0 & K_{1D}^{'}(m)D_v \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{u}_m(t) \\ \hat{v}_m(t) \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} \hat{e}_m \\ \hat{e}_m^{'} \end{bmatrix} \tag{7.8.}$$

S-a luat în discutie cazul general în care caracteristica elementului neliniar nu trece prin origine (caz care se poate asemana unuia în care sistemul este excitat cu un semnal spatial constant în timp de o forma particulara) si când template-urile pe cele doua straturi sunt diferite. În relatia (7.8) $K_{1D}(m)$ si $K_{1D}^{'}(m)$ sunt valorile proprii spatiale corespunzatoare stratului notat cu u si respectiv stratului v. Expresia acestor valori proprii va fi dedusa ulterior.
Parametrul $\hat{\varepsilon}_m$ reprezinta valoarea componentei spectrale cu indexul m a semnalului spatial constituit de valorile sursei de curent continuu ale fiecarei celule (deplasamentul caracteristicii liniare pe portiuni a elementului neliniar, pe verticala fata de origine).
Se observa ca forma sistemului de ecuatii este una clasica, în care se pot izola matricea de tranzitie a starilor si matricea asociata excitatiei:

$$A = g \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1D}(m)D_u & 0 \\ 0 & K_{1D}^{'}(m)D_v \end{bmatrix} \qquad B = g \tag{7.9.}$$

Semnalul de intrare asociat cu sursele de curent constant dar cu valoare neomogena poate fi vazut ca o forma particulara de excitatie:

$$\dot{X} = AX + Be \qquad Y = X \tag{7.10.}$$

Solutia sistemului liniarizat în jurul originii este data în relatia:

$$\begin{cases} \hat{u}_m(t) = a_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_1} t} + b_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_2} t} + f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) \\ \hat{v}_m(t) = c_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_1} t} + d_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_2} t} + f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) \end{cases} \tag{7.11.}$$

Parametrii λ_{m1} si λ_{m2} sunt solutiile ecuatiei caracteristice:

$$\begin{aligned} l_m^2 - l_m [g(f_u + g_v) + D_u K_{1D}(m) + D_v K_{1D}^{'}(m)] + D_u D_v K_{1D}(m) K_{1D}^{'}(m) \\ + g(D_v K_{1D}^{'}(m) f_u + D_u K_{1D}(m) g_v) + g^2 (f_u g_v - f_v g_u) = 0 \end{aligned} \tag{7.12.}$$

iar f_1 si f_2 reprezinta:

$$\begin{cases} f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) = \dfrac{-g(g g_v + K_{1D}^{'} D_v)\hat{e}_m + g^2 f_v \hat{e}_m^{'}}{(g f_u + K_{1D} D_u)(g g_v + K_{1D}^{'} D_v) - g^2 f_v g_u} \\ f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) = \dfrac{g^2 g_u \hat{e}_m - g(g f_u + K_{1D} D_u)\hat{e}_m^{'}}{(g f_u + K_{1D} D_u)(g g_v + K_{1D}^{'} D_v) - g^2 f_v g_u} \end{cases} \tag{7.13.}$$

Cu notatiile:

$$p_m = \frac{l_{m1} - g f_u - D_u K_{1D}(m)}{g f_v}; \; q_m = \frac{l_{m2} - g f_u - D_v K_{1D}^{'}(m)}{g g_u} \tag{7.14.}$$

Solutia în domeniu timp pentru sistemul de ecuatii liniarizat este:

$$\begin{aligned} u_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[a_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_1} t} + b_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_2} t} + f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) \right] \Phi_M(m,i) \\ v_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[c_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_1} t} + d_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) e^{l_{m_2} t} + f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) \right] \Phi_M(m,i) \end{aligned} \tag{7.15.}$$

iar constantele de integrare a_m, b_m, c_m si d_m au expresiile:

$$\begin{aligned} a_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) &= -\frac{1}{p_m q_m - 1}\hat{u}_m(0) + \frac{q_m}{p_m q_m - 1}\hat{v}_m(0) + \frac{f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) - q_m f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'})}{p_m q_m - 1} \\ d_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) &= \frac{p_m}{p_m q_m - 1}\hat{u}_m(0) - \frac{1}{p_m q_m - 1}\hat{v}_m(0) + \frac{f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) - p_m f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'})}{p_m q_m - 1} \\ b_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) &= \frac{p_m q_m}{p_m q_m - 1}\hat{u}_m(0) - \frac{q_m}{p_m q_m - 1}\hat{v}_m(0) + \frac{f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) - p_m f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'})}{p_m q_m - 1} q_m \\ c_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}, \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0)) &= -\frac{p_m}{p_m q_m - 1}\hat{u}_m(0) + \frac{p_m q_m}{p_m q_m - 1}\hat{v}_m(0) + \frac{f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'}) - q_m f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m^{'})}{p_m q_m - 1} p_m \end{aligned} \tag{7.16.}$$

Din forma generala a solutiei, se poate vedea ca depinde de conditiile initiale, valorile curentilor debitati de sursele independente de curent, valorile proprii temporale si de forma functiilor proprii, care este legata de conditiile de granita, dupa cum se va vedea în continuare.

Functii proprii si valori proprii pentru exponentiale (conditii de frontiera periodice si template-uri asimetrice)

Dupa cum am subliniat în paragraful precedent, cel mai general tip de functii proprii considerat este cel corespunzator bazei transformatei Fourier discrete. Template-ul dat mai jos descrie în general operatorul asimetric O_{1D}:

A_{-1}	A_0	A_1

Functia reprezentata în relatia (7.6) este functie proprie pentru operatorul O_{1D}, valoarea proprie fiind:

$$K_{1D}(m) = A_0 + (A_{-1} + A_1)\cos(w(m)) + j(A_1 - A_{-1})\sin(w(m)) \qquad (7.17.)$$

Pentru cazul general valorile proprii spatiale sunt numere complexe. Pentru template-uri simetrice ($A_{-1}=A_1$):

$$K_{1D} = A_0 + 2A_1\cos(w(m)) \qquad (7.18.)$$

valorile proprii spatiale sunt reale

Forma generala a solutiei pentru cazul functiilor proprii exponentiale

Forma generala a solutiei pentru cazul functiilor proprii exponentiale este data în relatia:

$$u_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1}\left[\begin{array}{l} a_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}', \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0))e^{l_{m_1}t} + \\ \qquad b_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}', \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0))e^{l_{m_2}t} + f_1(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}') \end{array}\right] e^{j(w(m)i + j(m))}$$

$$v_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1}\left[\begin{array}{l} c_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}', \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0))e^{l_{m_1}t} + \\ \qquad d_m(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}', \hat{u}_m(0), \hat{v}_m(0))e^{l_{m_2}t} + f_2(\hat{e}_m, \hat{e}_m{}') \end{array}\right] e^{j(w(m)i + j(m))} \qquad (7.19.)$$

Conditiile initiale

Conditiile initiale joaca un rol cheie în formarea pattern-urilor [63]. S-au utilizat conditii initiale mici care asigura un oarecare timp de evolutie pâna la atingerea primei zone cu alta panta a caracteristicii liniare pe portiuni (în cazul cel mai general când avem de a face cu doua elemente neliniare în celula).
Utilizând relatiile de mai sus se pot controla în cel mai strict mod solutiile sistemului de ecuatii si deci pattern-ul la momentul t_x.

Suprafata[10] de dispersie pentru cazul exponentialelor

Conditia necesara si suficienta pentru ca sistemul sa devina instabil este ca acesta sa aiba cel putin o componenta spectrala în semnalul constituit de conditiile initiale cu partea reala a valorii proprii temporale corespunzatoare pozitiva:

$$\mathrm{Re}(l_{1,2}(K_{1D}(m), K_{1D}{}'(m))) = \mathrm{Re}\{g\frac{f_u + g_v}{2} + \frac{D_u K_{1D}(m) + D_v K_{1D}{}'(m)}{2}$$
$$\pm\sqrt{\left[g\frac{(g_v - f_u)}{2} - \frac{(D_u K_{1D}(m) - D_v K_{1D}{}'(m))}{2}\right]^2 + g^2 f_v g_u}\} > 0 \qquad (7.20.)$$

Relatia de mai sus reprezinta expresia radacinilor ecuatiei caracteristice în cazul când fiecarui strat îi corespunde un template.
În general, $K_{1D}(m)$ si $K_{1D}{}'(m)$ au valori complexe. În consecinta, radacinile ecuatiei caracteristice pot fi complexe, dar nu în mod necesar complex conjugate. Stabilitatea în legatura cu un anumit mod este decisa de valoarea partii reale a valorii proprii temporale (pozitiva sau negativa), în timp ce evolutia unui anumit mod (faptul ca se face într-o maniera oscilanta sau nu) este decisa de partea imaginara a valorii proprii temporale corespunzatoare.

---

[10] Reprezinta valorile proprii temporale ale sistemului în functie de valorile proprii spatiale diferite pe cele doua straturi

În Fig. 24a) este reprezentata suprafata de dispersie pentru cazul restrictiv în care template-urile sunt simetric (valori proprii spatiale reale) si diferite, iar in Fig. 24b) situatia pentru template-uri simetrice si identice pe cele doua straturi:

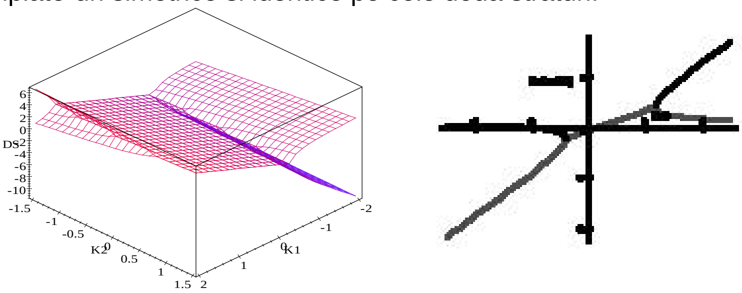


Fig.24 : Partea reala a ambelor valori proprii temporale în functie de a) valorile proprii spatiale pentru fiecare strat; b) valorile proprii spatiale cand sunt identice pe cele doua straturi

Pentru Fig. 24b) s-a reprezentat cu linie solida radacina cu semnul + si cu linie punctata radacina cu semn -. Sa observam ca exista o regiune din curba de dispersie pentru care radacinile sunt complex conjugate (cazul cu template-uri simetrice pentru fiecare din cele doua straturi) si doua regiuni în fiecare din cele doua parti în care radacinile sunt reale si distincte. Aceasta înseamna ca pattern-ul va creste "din doua motive" în aceste regiuni laterale.
Mai mult, putem obtine din jocul parametrilor aceeasi curba plasata în regiuni diferite. Regiunea centrala (legata de valorile proprii temporale complex conjugate) poate avea panta negativa numai prin simpla schimbare a semnului unui parametru (D_v).

Decuplarea straturilor

În cazul în care termenul $\gamma^2 f_v g_u$ este mic (sau zero) acesta se poate neglija si se obtine un sistem format din doua CNN-uri cu celule de ordinul 1, care functioneaza independent una fata de cealalta. Radacinile ecuatiei caracteristice sunt date mai jos:

$$l_{m1}(m) \cong gf_u + D_u K_{1D}(m), \quad l_{m2}(m) \cong gg_v + D_v K_{1D}^{'}(m) \qquad (7.21.)$$

Prima radacina depinde numai de parametrii asociati primului strat (asociat cu indexul u), în timp ce a doua radacina depinde numai de cei corespunzatori sistemului v (asociat cu indexul v). Curba de dispersie corespunzând fiecarui sub-sistem separat format din celule de ordinul I este o dreapta cu panta depinzând de semnul lui D_u si respectiv D_v. Aceasta corespunde rezultatelor care s-au raportat pâna în acest moment pentru CNN-uri cu celule de ordinul I.

Template-uri simetrice

În ceea ce urmeaza ne vom îndrepta atentia spre template-urile simetrice. Dupa cum am mai mentionat, pentru aceasta familie de template-uri decuplarea ecuatiilor este posibila si pentru alte tipuri de conditii de granita si în consecinta si pentru alte functii proprii. Functiile proprii sunt în toate aceste cazuri reale si tot reale vor fi si valorile proprii spatiale.
Dupa cum s-a aratat într-unul din paragrafele precedente, functia exponentiala "trece" nedeformata prin operatorul spatial liniar O_{1D}. Vom trata în mod global aceasta familie de functii proprii tinând cont de o forma care sa includa toate functiile proprii cunoscute în acest moment:
Forma template-ului luat în discutie este dat mai jos:

A_{-1}	A_0	A_1

Valoarea proprie asociata functiei proprii de tip exponentiala este aceeasi si pentru functia proprie data mai jos:

$$\Phi_M(-w(m),-j(m),i) = e^{-j(w(m)i+j(m))} \qquad (7.22.)$$

Functiile:

$$\Phi_M{}'(w(m),j(m),i) = \cos(w(m)i + j(m))$$
$$\Phi_M{}''(w(m),j(m),i) = \sin(w(m)i + j(m)) \qquad (7.23.)$$

sunt functii proprii pentru operatorul O_{1D} si corespunzator au aceeasi valoare proprie spatiala ca si functia exponentiala pentru cazul template-ului simetric (7.18). In Anexa 1 se afla tabelate functiile si valorile proprii pentru diferite tipuri de conditii de granita (1D).

Curba de dispersie vazuta ca functie de moduri

Curba de dispersie poate fi interpretata ca reprezentarea caracteristicii de amplitudine a unui filtru spatial în raport cu conditiile initiale, în sensul ca, pornind de la conditii initiale mici filtrul "amplifica" modurile care au partea reala a valorii proprii temporale corespunzatoare pozitiva. În consecinta, reprezentarea partii reale a valorilor proprii temporale în functie de moduri poate fi facuta pe baza proprietatii de monotonie în raport cu m a tuturor functiilor proprii studiate, pe tot intervalul în care m variaza de la 0 la M-1. În continuare se considera cazul template-urilor simetrice identice pe ambele straturi.

Expresia matematica a valorii proprii spatiale $K_{1D}(m)$ arata ca aceasta apartine intervalului [min($A_0 \pm 2A_1$), max($A_0 \pm 2A_1$)]. Lucrurile pot fi privite intuitiv în felul urmator: se alege o fereastra în cadrul curbei de dispersie, a carei pozitie este data de parametrul A_0 al template-ului si a carei largime este data de parametrul A_1 al aceluiasi template. Pentru a pastra tipul de monotonie al curbei de dispersie în functie de valorile proprii spatiale la schimbarea de variabila, trebuie sa alegem semnul lui A_1 negativ (filtrele trece jos sa ramâna trece jos si în coordonate functie de moduri, etc). Astfel cu aceasta conventie $K_{1D}(m)$ va apartine intervalului [A_0-$2A_1$, A_0+$2A_1$] cu A_0 si A_1 pozitivi.

Pentru prima curba de dispersie reprezentata vom izola o fereastra corespunzatoare parametrilor $A_0=2$ si $A_1=-1$. Intervalul în care $K_{1D}(m)$ ia valori este [0,4]. În consecinta, curba de dispersie reprezentata ca functie de moduri va fi distorsionata (dependenta neliniara, dar monotona a lui K_{1D} de m), dar va corespunde unei ferestre corespunzatoare valorilor lui $K_{1D}(m)$ între 0 si 4:

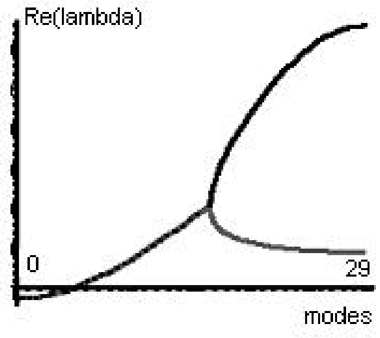


Fig. 25: Partea reala a ambelor valori proprii temporale functie de moduri
(aceeasi valoare pentru ambele straturi)

Linia solida (cea de deasupra) reprezinta locul geometric al partii reale a valorii proprii temporale cu semnul + când m parcurge intervalul [0,29] (30 celule) în timp ce linia punctata reprezinta acelasi lucru pentru solutia cu semnul -.

De exemplu, luând în considerare chiar figura de mai sus, modurile cu indecsi mai mici de 17 se vor dezvolta într-o maniera oscilanta crescator exponential, pe când cele cu indecsi mai mari decât 17 se vor dezvolta numai într-un mod exponential (nu vor avea caracter oscilant).

Utilizând aceasta tehnica se poate imagina usor un mod de a proiecta filtre spatiale de acest tip având aceleasi template-uri simetrice pe ambele straturi:

- se seteaza valorile pentru toti parametrii tinând cont de punctele esentiale de pe curba de dispersie cu exceptia lui A_0 si al lui A_1. În aceasta etapa, forma curbei de dispersie ca functie de K_{1D} este cunoscuta.
- se seteaza valoarea pentru parametrul A_0 (pentru plasarea ferestrei de interes) si apoi se seteaza valoarea parametrului A_1 pentru a se stabili largimea ferestrei (cât din curba de dispersie se va lua în considerare).

Utilizând aceasta tehnica se pot obtine toate tipurile de filtre spatiale TJ, TS, TB).

Cazuri particulare

Pattern-uri Turing

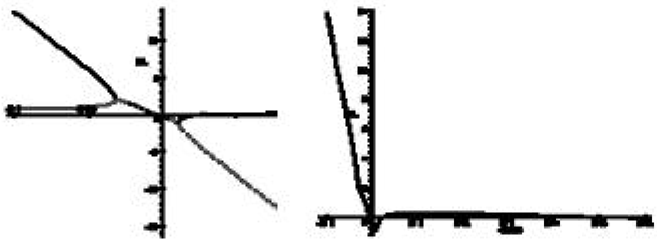
Cazul „pattern-uri Turing" corespunde unui template simetric, acelasi pentru ambele straturi, de forma:

-1	2	-1

Pentru a se obtine pattern-uri Turing, trebuie sa fie satisfacute urmatoarele conditii [53-55]:

$$f_u + g_v < 0, \qquad f_u g_v - f_v g_u > 0$$
$$D_v f_u + D_u g_v > 0 \qquad (D_v f_u - D_u g_v)^2 + 4 D_u D_v f_v g_u > 0 \tag{7.24.}$$

Un set de parametrii pentru care un asemenea sistem poate produce pattern-uri Turing este: γ=5, f_u=0.1, f_v=-1, g_u=0.1, g_v=-0.2, D_u=1, D_v=150. (M=30).
Curba de dispersie corespunzatoare este reprezentata în figurile de mai jos:



a) ambele soluții   b) rădăcina cea mai mare

Fig.26: Partea reală a valorilor proprii temporale funcție de valoarea proprie spațială (aceeași pentru ambele straturi)

Se reaminteste ca s-a facut reprezentarea în functie de $-K_{1D}$ din cauza conventiei diferite în cazul pattern-urilor Turing. Cu notatia adoptata în aceasta lucrare, în cazul pattern-urilor Turing valorile proprii spatiale au tot timpul semnul negativ [54].

Modalitati de control ale curbei de dispersie

În paragraful "Curba de dispersie vazuta ca functie de moduri" s-a expus principiul calitativ care conduce proiectarea unui filtru liniar spatial. În acest paragraf se vor da câteva relatii cantitative si se va da un exemplu de proiectare a unui asemenea filtru.

Puncte semnificative ale curbei de dispersie

Dupa cum se poate vedea în reprezentarile acesteia, curba de dispersie cuprinde în general trei regiuni: 2 laterale în care valorile proprii sunt reale si distincte si una centrala în care valorile proprii sunt complex conjugate în cazul template-ului simetric si acelasi pe ambele straturi.
În particular, zona valorilor proprii complexe se poate restrânge pâna la disparitie, ca în figura de mai jos, caz în care $f_v g_u$>0:

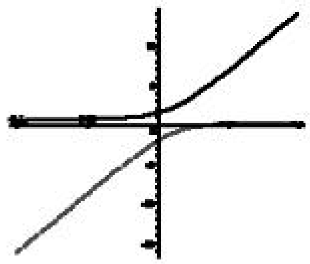


Fig. 27: Partea reală a valorilor proprii temporale funcție de valoarea proprie spațială (aceeași pentru ambele straturi) pentru $f_v g_u$>0

Zona de valori proprii complex conjugate este delimitata de urmatoarele doua valori:

$$K_{1Dleft} = \min\left\{-\frac{g}{D_u - D_v}\left(f_u - g_v \pm 2\sqrt{-f_v g_u}\right)\right\}$$
$$K_{1Dright} = \max\left\{-\frac{g}{D_u - D_v}\left(f_u - g_v \pm 2\sqrt{-f_v g_u}\right)\right\} \quad (7.25.)$$

Largimea zonei de mijloc este data de relatia:

$$\Delta K_{1D} = -\frac{4g\sqrt{-f_v g_u}}{D_u - D_v} \quad (7.26.)$$

Coordonata mijlocului zonei de mijloc este data de relatia:

$$K_{1Dmiddle} = -\frac{g}{2(D_u - D_v)}\left(f_u - g_v\right) \quad (7.27.)$$

Din relatiile de mai sus [69-72] se vede înca o data ca o conditie necesara pentru ca zona de mijloc sa existe (numerele K_{1Dleft} si $K_{1Dright}$ sa fie reale) trebuie ca produsul $f_v g_u$ sa fie negativ. La limita daca $f_v g_u=0$, exista doar un K_{1D} pentru care valorile proprii temporale sunt complex conjugate. Acest lucru se verifica si prin faptul ca $K_{1Dleft}=K_{1Dright}$. Din relatia precedenta se vede ca se poate muta pozitia pe orizontala a punctului de mijloc al zonei cu valori proprii temporale complex conjugate. Se vede ca atunci când $f_u=g_v$ punctul din mijlocul acestei zone este chiar originea.

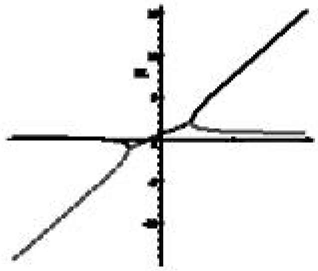


Fig. 28: Partea reală a valorilor proprii temporale funcție de valoarea proprie spațială (aceeași pentru ambele straturi), cazul $f_u=g_v$

Partea reala a valorii proprii temporale pentru acest caz în origine este:

$$\mathrm{Re}(l_{1,2}(K_{1D}))=gf_u \qquad (7.28.)$$

Atunci când D_u este diferit de $-D_v$ si exista doua extreme ($f_v g_u D_u D_v<0$), un maxim si un minim, unul pe locul geometric al unei radacini, iar celalalt pe locul geometric al celeilalte radacini.
Abscisele extremelor sunt:

$$K_{1Dextrem1}=\frac{g}{D_u-D_v}\left(g_v-f_u-(D_u+D_v)\sqrt{\frac{-f_v g_u}{D_u D_v}}\right)$$
$$K_{1Dextrem2}=\frac{g}{D_u-D_v}\left(g_v-f_u+(D_u+D_v)\sqrt{\frac{-f_v g_u}{D_u D_v}}\right) \qquad (7.29.)$$

Extremele sunt utile pentru obtinerea caracteristicilor de tip filtru trece banda si respectiv pentru obtinerea de caracteristici de tip filtru opreste banda.
Se reprezinta mai jos cazul în care a) Du=-Dv si b) cazul în care ele sunt diferite si în plus este îndeplinita si conditia $D_u D_v>0$ (cu $f_v g_u<0$ pentru a) si b)).

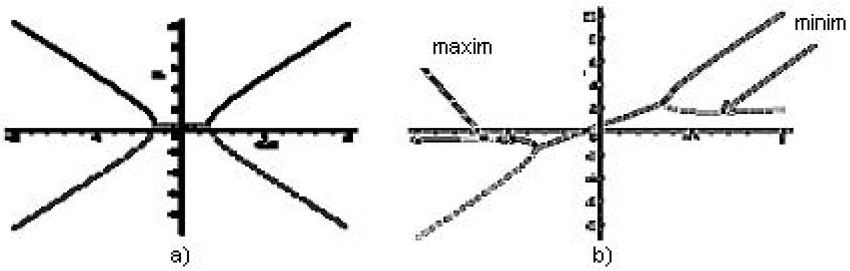


Fig. 29: Partea reala a valorilor proprii temporale în functie de valoarea proprie spatiala (aceeasi pentru ambele straturi), ilustrarea notiunii de punct de extrem

Rezultate provenite din simulare

In exemplul I va fi simulat FTS, pe când în exemplul II se va simula comportarea FTJ.

Exemplul I: Se vor initializa variabilele de stare cu un semnal aleator pentru a realiza o filtrare trece sus a acestuia. Filtrarea este destul de slaba (doar primele 7 moduri nu vor "trece" de acest filtru):

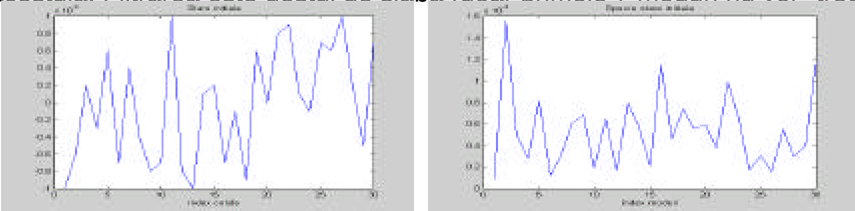


Fig. 30: a) Stare initiala; b) Spectrul starii u initiale

Starea finala si spectrul acesteia se reprezinta mai jos:

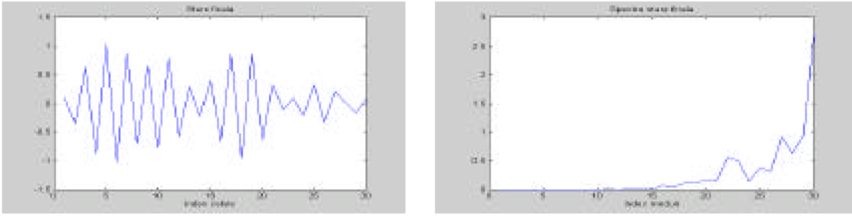


Fig. 31: a) Stare finala; b) Spectru stare finala

observându-se caracterul trece-sus al filtrului.

Exemplul II Se initializeaza reteaua cu un semnal aleator. Starea initiala si spectrul semnalului initial sunt aceleasi ca cele din Fig. 30:Starea finala si respectiv spectrul starii finale sunt reprezentate mai jos:

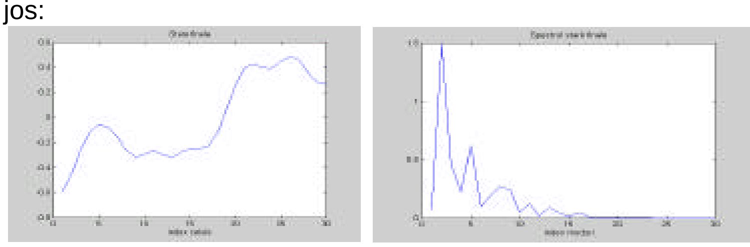


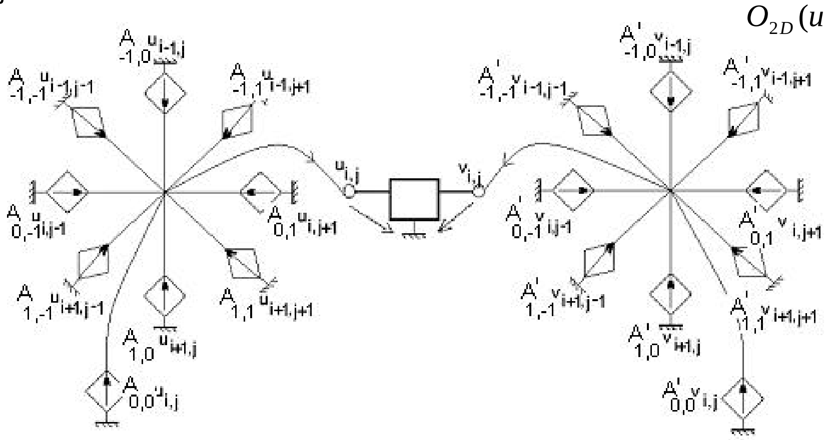
Fig. 32: a) Stare finala; b) Spectru stare finala

Capitolul 8.: Studiul retelei neuronale celulare 2D formate din celule de ordinul II conectate cu o vecinatate de raza unitate

Prin dubla interconectare a celulelor generale de ordinul II (solutia de circuit) se poate obtine un sistem autonom a carui functionare în zona liniara centrala a celulelor liniare pe portiuni sa poata realiza o procesare de imagine utila.

Interconexiunile

Modul de interconectare este similar cazului 1D prezentat în capitolul 7, interconexiunile fiind aici descrise de un template bidimensional care, în general este nesimetric.
Coeficientii acestuia au fost notati cu $A_{i,j}$ cu fiecare dintre indici luând valori în multimea {-1, 0, 1}.



$$\begin{aligned} O_{2D}(u_{i,j}) = {} & A_{-1,-1}u_{i-1,j-1} + \\ & A_{-1,0}u_{i-1,j} + \\ & A_{-1,1}u_{i-1,j+1} + \\ & A_{0,-1}u_{i,j-1} + \\ & A_{0,0}u_{i,j} + \\ & A_{0,1}u_{i,j+1} + \\ & A_{1,-1}u_{i+1,j-1} + \\ & A_{1,0}u_{i+1,j} + \\ & A_{1,1}u_{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (8.1.)$$

Fig 33: Interconexiunile în CNN-ul 2D

S-a considerat, ca si în cazul 1D ca cele doua straturi au template-uri diferite.

Template-uri asimetrice si template-uri simetrice

În cazul cel mai general se vorbeste de template-uri asimetrice. Expresia operatorului care descrie template-ul este data in ecuatia 8.1.

Conditii de granita

Consideratiile prezentate în capitolul 7 referitoare la conditiile de granita se extind imediat la cazul 2D, pentru fiecare directie putând exista conditii de granita precum cele discutate în cazul 1D. Se vor trece succint în revista câteva cazuri, remarcând ca sunt posibile conditii la limita diferite pentru fiecare latura a CNN-ului (desigur cu exceptia cazului periodic).
Pentru un CNN cu MxN celule, conditiile de granita sunt descrise prin intermediul urmatoarelor seturi de ecuatii:

tip periodic (inel) $u(-1,j,t)=u(M-1,j,t),$ $u(i,-1,t)=u(i,N-1,t),$ $u(0,j,t)=u(M,j,t),$ $u(i,0,t)=u(i,N,t)$	*tip zero-flux* $u(-1,j,t)=u(0,j,t),$ $u(i,-1,t)=u(i,0,t),$ $u(M,j,t)=u(M-1,j,t),$ $u(i,N,t)=u(i,N-1,t)$	*tip anti-zero-flux* $u(-1,j,t)=-u(0,j,t),$ $u(M,j,t)=-u(M-1,j,t)$ $u(i,-1,t)=-u(i,0,t),$ $u(i,N,t)=-u(i,N-1,t)$
zero-zero-flux,antizero-flux-quasi-zf $u(i,-1,t)=0,\ v(i,-1,t)=0,$ $u(i,N,t)=u(i,N-1,t),\ v(i,N,t)=v(i,N-1,t),$ $u(-1,j,t)=-u(0,j,t),\ v(-1,j,t)=-v(0,j,t),$ $u(M,j,t)=u(M-2,j,t),\ v(M,j,t)=v(M-2,j,t)$	*tip quasi-zero flux* $u(-1,j,t)=u(1,j,t),$ $u(M,j,t)=u(M-2,j,t)$ $u(i,-1,t)=u(i,1,t),$ $u(i,N,t)=u(i,N-2,t)$	*tip quasizero-flux-quasizero-flux zero-zero* $u(-1,j,t)=0,\ u(M,j,t)=0$ $u(i,-1,t)=u(i,1,t),\ u(i,N,t)=u(i,N-2,t)$ $v(-1,j,t)=0,\ v(M,j,t)=0$ $v(i,-1,t)=v(i,1,t),\ v(i,N,t)=v(i,N-2,t)$
tip zero: $u(-1,j,t)=0,\ u(M,j,t)=0,\ u(i,-1,t)=0,\ u(i,N,t)=0$		

Ecuatii si solutie

Ecuatiile ce descriu functionarea CNN-ului 2D se extind usor pornind de la cele 1D. Modul de rezolvare este similar si nu se mai insista asupra lui. In Anexa 2 se dau functiile proprii si valorile proprii pentru cazul 2D. Studiul stabilitatii CNN-ului se face pe baza curbei de dispersie.

Capitolul 9.: Comparatie între CNN-ul cu celule de ordinul II dublu cuplate si vecinatate r=1 si CNN-ul cu celule de ordinul I cu vecinatate r=2

În cele ce urmeaza se va studia influenta ordinului celulei si a template-ului asupra dinamicii CNN-ului [69] cu template simetric.

Studiul unui CNN cu celule de ordinul I cu vecinatate r=1

Ecuatia unui CNN cu celule de ordinul I si vecinatate r=1 pentru functionarea în zona liniara din jurul originii în regim autonom este data mai jos:

$$\frac{du_i(t)}{dt}=-u_i+O_{1D}(u_i)+e \qquad i=0..M \tag{9.1.}$$

în care pentru un template simetric

A_1	A_0	A_1

valoarea proprie spatiala este:

$$K_{1D}(m)=A_0+2A_1\cos(v\,(m)) \tag{9.2.}$$

Se face mentiunea ca tot ceea ce s-a spus despre valori proprii spatiale si functii proprii legate de anumite conditii de granita este valabil si în cazul acesta. Prin urmare nu se mai insista în ce fel s-a obtinut relatia de mai sus. Se face schimbarea de variabila:

$$u_i=\sum_{m=0}^{M-1}\Phi_M(m,i)\hat{u}_m \qquad i=0..M-1 \tag{9.3.}$$

Înlocuind în ecuatia CNN-ului aceasta solutie, si folosind aceeasi tehnica folosita în cazul cu CNN format din celule de ordinul II, se obtine:

$$\frac{d\hat{u}_m(t)}{dt}=\left(-1+K_{1D}(m)\right)\hat{u}_m+\hat{e}_m \qquad i=0..M \tag{9.4.}$$

Se face si aici observatia se poate izola o matrice de tranzitie si o excitatie particulara, formata din sursele de curent constante din arhitectura celulelor. Curba de dispersie este data de relatia:

$$\mathrm{Re}(l\,(K_{1D}(m)))=\mathrm{Re}(K_{1D}(m))-1 \tag{9.5.}$$

iar valorile proprii temporale sunt reale. Se poate aplica pentru proiectarea template-urilor metoda ferestrei mentionata în capitolele anterioare.

Studiul unui CNN cu celule de ordinul I cu vecinatate r=2

Ecuatia unui CNN cu celule de ordinul I si vecinatate r=2 pentru functionarea în zona liniara din jurul originii în regim autonom este:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -u_i + O_{1D}^{r=2}(u_i) + e \qquad i = 0..M \tag{9.6.}$$

în care pentru un template simetric de forma

A_2	A_1	A_0	A_1	A_2

valoarea proprie spatiala este:

$$K_{1D}^{r=2}(m) = A_0^{r=2} + 2A_1^{r=2}\cos(w(m)) + 2A_2^{r=2}\cos(2w(m)) \tag{9.7.}$$

Relatia de mai sus poate fi pusa si sub forma:

$$K_{1D}^{r=2}(m) = A_0^{r=2} - 2A_2^{r=2} + 2A_1^{r=2}\cos(w(m)) + 4A_2^{r=2}\cos^2(w(m)) \tag{9.8.}$$

Se poate rescrie:

$$K_{1D}^{r=2}(m) = a\,(K_{1D}(m))^2 + bK_{1D}(m) + g \tag{9.9.}$$

de unde rezulta ca putem exprima curba de dispersie în cazul vecinatatii de ordinul 2 în felul urmator:

$$\mathrm{Re}(l\,(K_{1D}(m))) = a\,(K_{1D}(m))^2 + bK_{1D}(m) + g - 1 \tag{9.10.}$$

Ecuatia de mai sus sugereaza de fapt ca se poate exprima curba de dispersie în cazul vecinatatii de ordinul ca functie de $K_{1D}(m)$, care este o functie monotona de moduri pe intervalul 0..M-1. Se poate rationa în acest fel în legatura cu curba de dispersie cu fereastra de largime $2A_1$ pozitionata de parametrul A_0.

În continuare se va prezenta modul de lucru folosit pentru proiectarea CNN-ului de ordinul 1 si cu template cu r=2, folosind „tehnica ferestrei".

Modul de lucru este urmatorul:

- în functie de curba de dispersie dorita se aleg parametrii α, β si γ. care stabilesc forma acesteia;
- se alege fereastra (se va vedea în exemplul de mai jos o procedura concreta de lucru) fapt care fixeaza valorile parametrilor A_0 si A_1;
- se determina valorile parametrilor din template-ul de ordinul 2 folosind setul de relatii care s-au determinat prin identificarea termenilor ultimelor doua ecuatii:

$$\begin{cases} A_0^{r=2} = a\,(A_0^{\,2} + 2A_1^{\,2}) + bA_0 + g - 1 \\ A_1^{r=2} = 2aA_0A_1 + bA_1 \\ A_2^{r=2} = aA_1^{\,2} \end{cases} \tag{9.11.}$$

În cazul CNN-ului realizat cu celule de ordinul 1 si template de tip r=2 curba de dispersie în functie de $K_{1D}(m)$ este o parabola. În functie de parametrii impusi, ea se poate pozitiona, poate avea maxim sau minim si se poate dilata/contracta.

Punctele semnificative de pe curba au expresiile:

- daca α<0, atunci curba prezinta un maxim. Daca α>0, curba are un minim; Valorile maximului/minimului sunt date mai jos:

$$K_{1Dextrem} = -b\,/\,2a \tag{9.12.}$$

- punctul de maxim/minim (punctul cu cea mai mare valoare proprie temporala) este dat de relatia

$$\mathrm{Re}(l\,(K_{1D}))\big|_{\max/\min} = -b^2/4a + g - 1 \tag{9.13.}$$

Se observa ca parametrul γ este foarte important pentru stabilirea pozitiei pe verticala a curbei de dispersie. Facem precizarea ca acesta nu are nici o legatura cu parametrul cu acelasi nume din cazul CNN-ului de ordinul II.

- punctele în care curba de dispersie intersecteaza abscisa sunt date de relatiile:

$$K_{1Dleft} = \min\left\{\frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,(g-1)}\right)\right\} \tag{9.14.}$$

$$K_{1Dright} = \max\left\{\frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\,(g-1)}\right)\right\}$$

Conditia ca axa absciselor sa se intersecteze cu curba de dispersie este ca termenul de sub radical sa fie pozitiv: $b^2 - 4a\,(g-1) > 0$

(9.15.)

În acest caz se poate izola cu ajutorul ferestrei din curba de dispersie ca functie de $K_{1D}(m)$ o regiune în care valorile proprii temporale sunt pozitive, fie ca α este pozitiv sau negativ. La limita, curba de dispersie functie de $K_{1D}(m)$ intersecteaza într-un punct axa absciselor, cel de minim sau de maxim.
O curba de dispersie tipica este cea data în figura:

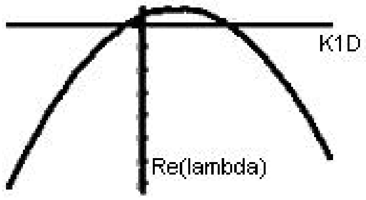


Fig. 34: Curba de dispersie pentru α=-2, β=5 γ=4

Comparatie între CNN-ul cu celule de ordinul II dublu cuplate si vecinatate r=1 si CNN-ul cu celule de ordinul I cu vecinatate r=2

Nu se mai insista asupra rezultatelor ce descriu cantitativ dinamica CNN-ul cu celule de ordinul II dublu cuplate cu vecinatate de ordinul r=1. O curba de dispersie tipica este prezentata în Fig. 24b). Aceasta prezinta trei zone, doua laterale corespunzator carora valorile proprii temporale sunt reale si zona din mijloc, corespunzator careia valorile proprii sunt complex conjugate. Forma curbei de dispersie în functie de K_{1D} determina comportarea celor doua tipuri de CNN, functionând ca sisteme autonome instabile. Ele pot fi comparate folosind acelasi termen (K_{1D}).
Folosind ambele tipuri de sisteme se pot construi filtre spatiale (ce filtreaza starea) de tip trece-jos, trece-sus sau trece-banda. Daca se doreste proiectarea unui sistem cu astfel de functionalitati, este mai potrivit CNN-ul realizat din celule de ordinul I cu vecinatate de ordinul r=2. În cazul în care se doreste însa un sistem care sa poata avea si o dinamica de tip oscilator, acest lucru se poate obtine folosind CNN-uri cu celule de ordinul II dublu cuplate si template cu raza r=1.

Capitolul 10.: Studiul dinamicii CNN-urilor simplu cuplate cu ajutorul metodei locului radacinilor si a criteriului Nyquist

Arhitectura CNN

În cele ce urmeaza se va considera o generalizare a CNN-urilor discutate pâna acum: celulele vor fi considerate în zona centrala liniara ca fiind caracterizate de o admitanta Y(s) [71,72,75,76]. De fapt, arhitectura aceasta generalizeaza arhitectura standard CNN cu celule de ordinul I, descrisa de urmatorul set de ecuatii:

$$\frac{dx_{i,j}(t)}{dt} = -x_{i,j}(t) + \sum_{k,l\in N} A_{k,l} y_{i+k,j+l}(t) + \sum_{k,l\in N} B_{k,l} u_{i+k,j+l}(t) + I \qquad (10.1.)$$

$$y_{i,j}(x_{i,j}) = \frac{1}{2}\left(|x_{i,j} - 1| - |x_{i,j} + 1|\right)$$

În relatiile de mai sus N este dimensiunea vecinatatii celulei, i=0,1,…,M-1, j=0,1,…,N-1, A si B sunt template-uri, I este sursa de curent constant (numita si prag în terminologia standard) iar y(x) este functia neliniara care leaga starea de iesire.
Conexiunea dintre celule este data de template-ul A si este realizata cu ajutorul surselor de curent controlate în tensiune. Se utilizeaza o neliniaritate de tip saturatie. În acest caz, în partea centrala liniara a caracteristicii celulei, aceasta este descrisa de admitanta s+1-$A_{0,0}$. Aceasta observatie conduce la urmatoarea scriere a ecuatiilor ce descriu functionarea:

$$Y(s)x_{i,j}(t) = \sum_{k,l\in N} A_{k,l} y_{i+k,j+l}(t) + \sum_{k,l\in N} B_{k,l} u_{i+k,j+l}(t) \qquad (10.2.)$$

în care Y(s) este un operator integro-diferential, în particular Y(s)=s+1=d/dt+1.
În general,

$$Y(s) = Q(s)/P(s) \qquad (10.3.)$$

unde P(s) si Q(s) sunt polinoame în variabila s. Pentru functionarea în regiunea central liniara se pot scrie ecuatiile:

$$Y(s)x_{i,j}(t) = \sum_{k,l\in N} A_{k,l} x_{i+k,j+l}(t) + \sum_{k,l\in N} B_{k,l} u_{i+k,j+l}(t) \qquad (10.4.)$$

în care $x_{i,j}$ nu mai reprezinta în mod necesar variabile de stare ci potentialul în nodul (i,j), în timp ce $u_{i,j}$ sunt semnale de intrare, ca de obicei. În ceea ce urmeaza vom analiza versiunea 1D a setului de ecuatii de mai sus: $Y(s)x_i(t) = \sum_{k\in N} A_k x_{i+k}(t) + \sum_{k\in N} B_k u_{i+k}(t)$ (10.5.)

utilizând metoda decuplarii descrisa în [53-55]. Se fac schimbarile de variabila:

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi_M(m,i)\hat{x}_m(t) \quad u_i(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi_M(m,i)\hat{u}_m(t) \tag{10.6.}$$

i=0,1,…,M-1, unde functiile $\Phi_M(m,i)$ sunt dependente de conditiile la limita, dupa cum s-a aratat în capitolele precedente.

Se va lucra cu functia $\Phi_M(m,i)$ de forma:

$$\Phi_M(w(m), j(m), i) = e^{j(w(m)i + j(m))} \tag{10.7.}$$

În care ω(m) si φ(m) depind de conditiile la limita de tip periodic. Într-adevar, actiunea template-urilor A si B asupra acestor functii este urmatoarea:

$$\begin{aligned} \sum_{k\in N} A_k e^{j(w(m)i+j(m))} &= K_A e^{j(w(m)i+j(m))} \\ \sum_{k\in N} B_k e^{j(w(m)i+j(m))} &= K_B e^{j(w(m)i+j(m))} \end{aligned} \tag{10.8.}$$

unde,

$$\begin{aligned} K_A &= A_0 + \sum_{i=1}^{N-1}(A_i + A_{-i})\cos(iw(m)) + j\sum_{i=1}^{N-1}(A_i - A_{-i})\sin(iw(m)) \\ K_B &= B_0 + \sum_{i=1}^{N-1}(B_i + B_{-i})\cos(iw(m)) + j\sum_{i=1}^{N-1}(B_i - B_{-i})\sin(iw(m)) \end{aligned} \tag{10.9.}$$

(aici N este raza vecinatatii).

Pentru vecinatate de ordinul I, valorile proprii corespunzatoare sunt:

$$\begin{aligned} K_A &= A_0 + (A_1 + A_{-1})\cos(w(m)) + j(A_1 - A_{-1})\sin(w(m)) \\ K_B &= B_0 + (B_1 + B_{-1})\cos(w(m)) + j(B_1 - B_{-1})\sin(w(m)) \end{aligned} \tag{10.10.}$$

Ele sunt complexe pentru cazul general si reale pentru template-uri simetrice.

Cu schimbarile de variabila de mai sus, ecuatiile se decupleaza si au urmatoarea forma:

$$Y(s)\hat{x}_m(t) = K_A\hat{x}_m(t) + K_B\hat{u}_m(t) \tag{10.11.}$$

Dinamica solutiei ecuatiilor de mai sus este determinata de zerourile functiei urmatoare:

$$Q(s)/P(s) - K_A = 0 \tag{10.12.}$$

care poate fi rescrisa în felul urmator: $1 - K_A \dfrac{P(s)}{Q(s)} = 0$ (10.13.)

Pentru cazul CNN-urilor stabile, sisteme neautonome, se poate defini o functie de transfer pentru fiecare dintre moduri:

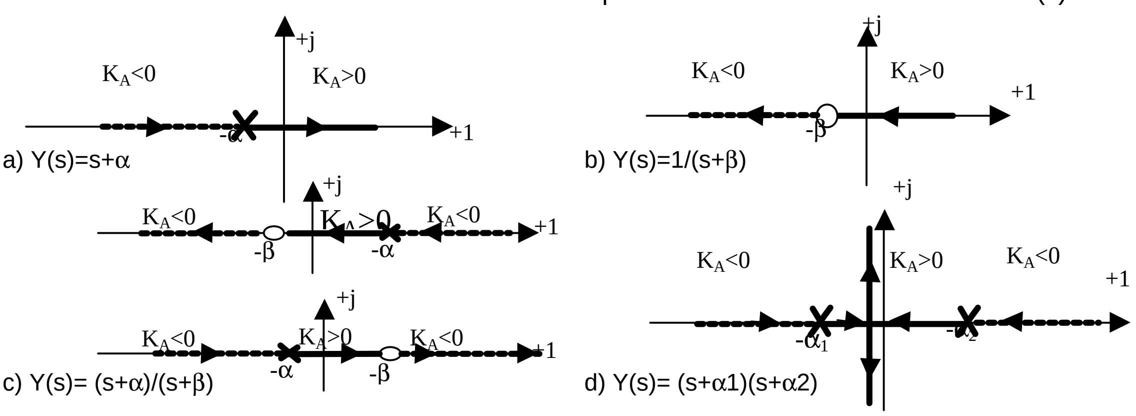
$$H_m(s) = \frac{K_B(m)}{\dfrac{Q(s)}{P(s)} - K_A(m)} \tag{10.14.}$$

Pentru template-uri simetrice, ecuatia de mai sus poate fi tratata utilizând metoda locului radacinilor cu trasare rapida, iar valorile proprii sunt reale:

$$K_A = A_0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} A_i \cos(iw(m)) \tag{10.15.}$$

Pentru cazul general (template-uri nesimetrice) locul radacinilor se traseaza numeric.

În cele ce urmeaza se vor trasa locurile radacinilor pentru câteva forme ale admitantei Y(s)

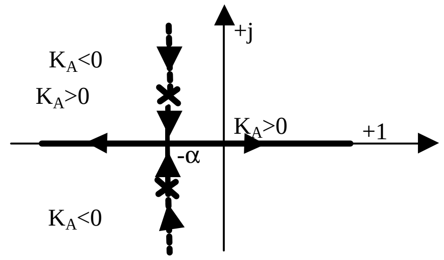


a) Y(s)=s+α

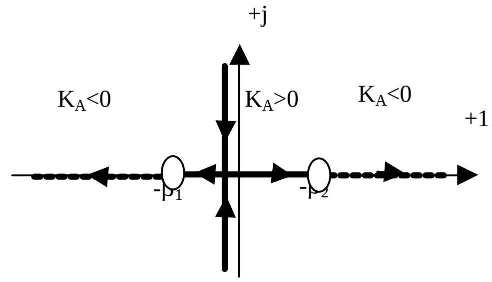
b) Y(s)=1/(s+β)

c) Y(s)= (s+α)/(s+β)

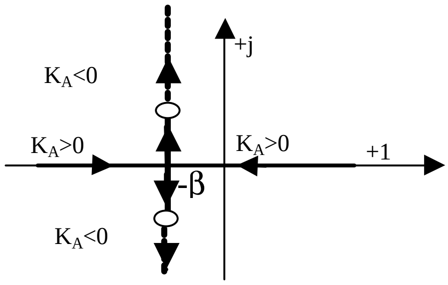
d) Y(s)= (s+α1)(s+α2)



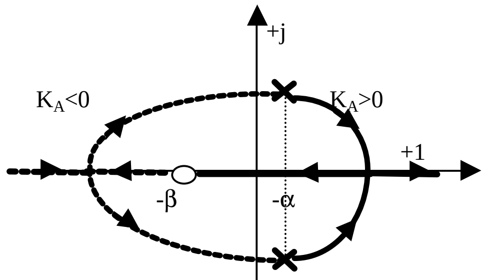
e) $Y(s)= s^2+2\alpha s+\omega_0^2$ ($w_0>\alpha$)



f) $Y(s)= 1/(s+\beta 1)(s+\beta 2)$

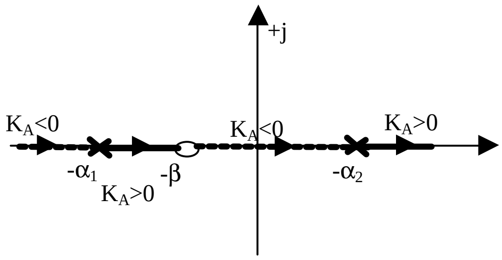


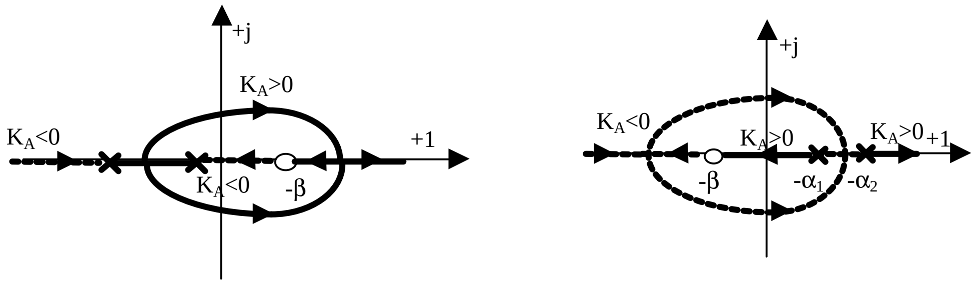
g) $Y(s)= 1/(s^2+2\beta s+\omega_0^2)$ ($w_0>\beta$)



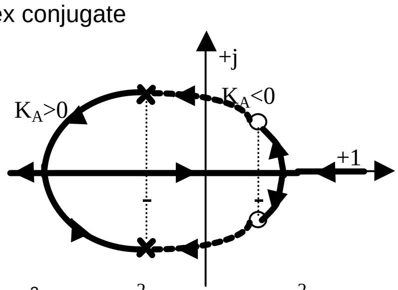
h) $Y(s)= (s^2+2\alpha s+\omega_0^2)/(s+\beta)$ ($w_0>\alpha$)

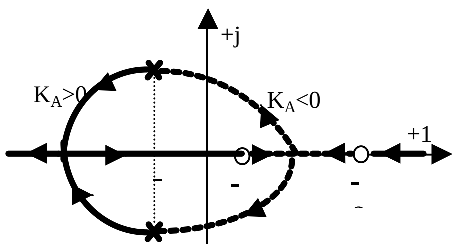
i)$Y(s)=(s+\alpha 1)(s+\alpha 2)/(s+\beta)$
în care zeroul se afla
între cei doi poli





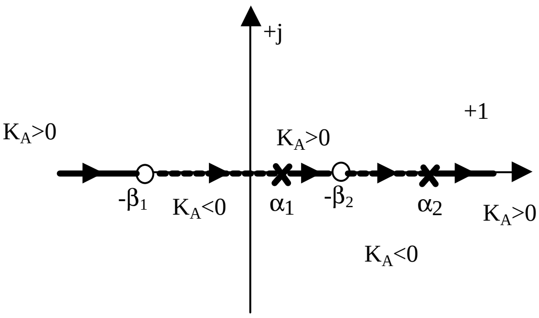
i) $Y(s)=(s+\alpha 1)(s+\alpha 2)/(s+\beta)$; când ambii poli sunt localizati la stânga zeroului sau invers radacinile pot fi complex conjugate



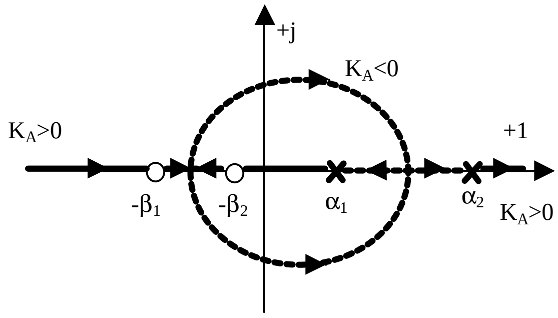


k) $Y(s)=(s^2+2\alpha s+w_1^2)/(s2+2\beta s+w_2^2)$
($w_1>\alpha, w_2>\beta$)

l) $Y(s)=(s^2+2\alpha s+w_1^2)/(s+\beta 1)(s+\beta 2)$ ($w_1>\alpha$)



m) Y(s)=(s+α1)(s+α2)/(s+β1)(s+β2); radacini reale pentru alternanta zero-pol



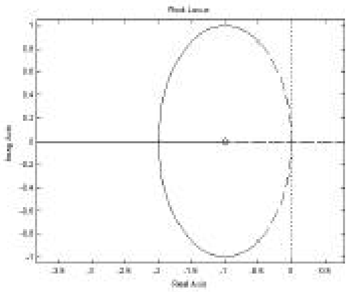
m) Y(s)=(s+α1)(s+α2)/(s+β1)(s+β2); radacini complex conjugate pentru zerouri si poli grupati

Fig. 35. Locul radacinilor pentru câteva cazuri de admitante

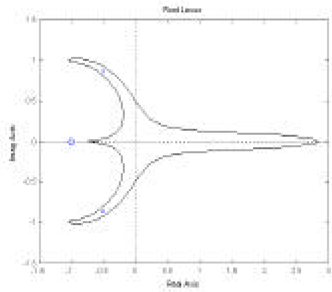
Sa notam aici ca, pentru admitante având numaratorul si numitorul interschimbate (adica polii si zerourile se interschimba), forma locului radacinilor se mentine, cu exceptia inversarii sensului sagetilor.

Trasarea LR pentru cazuri particulare ale admitantei Y(s) si template-uri asimetrice

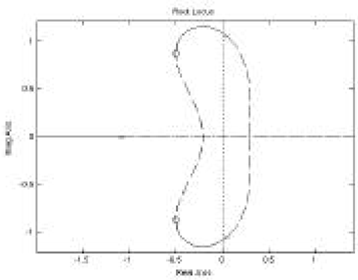
În cazul template-urilor asimetrice, forma locului radacinilor nu mai poate fi dedusa pe baza regulilor clasice. Astfel, rezultatele prezentate în continuare s-au obtinut prin simulare:



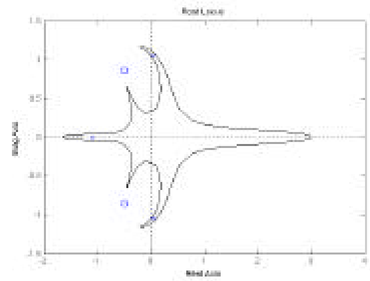
$Y(s)=(s^2+s+1)/(s+1)$, A=[1 1 1]



$Y(s)=(s^2+s+1)/(s+1)$, A=[1 1 1.1]



$Y(s)=(s^3+s^2+s+1.2)/(s^2+s+1)$, A=[1 1 1]



$Y(s)=(s^3+s^2+s+1.2)/(s^2+s+1)$, A=[1 1 1.1]

Fig. 36. Locul radacinilor pentru doua cazuri de admitante si template-uri simetrice (stânga) si asimetrice (dreapta).

Se prezinta în continuare un exemplu de loc al radacinilor pentru CNN-ul format din celule de ordinul 2 si având template de ordinul r=2.

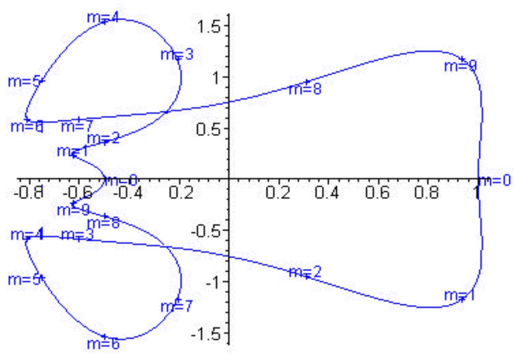


Fig. 37. Locul radacinilor pentru cazul $Y(s)=(s^2+s+1)(s+1)$ si A=[0.5,0.5,0.5,0.5,-0.5]

Comparatie a metodei locului radacinilor cu metoda curbei de dispersie în cazul celulei de ordinul II simplu cuplate

Metoda** curbei de dispersie **pentru cazul CNN cu celule de ordinul II simplu cuplate, cu vecinatate de ordinul I

Tot ceea ce s-a spus pentru CNN-uri cu celule de ordinul II simplu cuplate cu vecinatate de ordinul I este valabil pentru aceasta clasa de CNN-uri, facându-l pe Dv egal cu zero.
Curbele din figura urmatoare reprezinta locul partilor reale si imaginare ale solutiilor de mai sus:

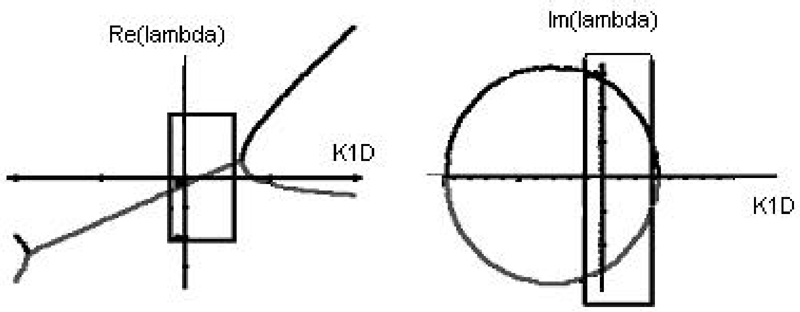


Fig. 38: Curba de dispersie pentru CNN-uri simplu cuplate a) partile reale; b) partile imaginare ale valorilor proprii temporale

Curbele de dispersie prezinta o regiune centrala cu radacini complexe si doua regiuni laterale cu radacini reale. Judecând dupa forma curbelor si dupa domeniul în care pot lua valori valorile proprii, sunt posibile diverse dinamici. Diferenta cazului prezentat fata de cazul CNN-ului cu celule dublu cuplate este aceea ca în primul nu se poate obtine o zona centrala orizontala cu exceptia situatiei când D_u=0, care corespunde celulelor neconectate. În plus, nu se pot obtine puncte de extrem pentru curba de dispersie (partea reala) în cazul CNN cuplat printr-un singur strat.

Metoda** locului radacinilor **pentru cazul CNN cu celule de ordinul II simplu cuplate, cu vecinatate de ordinul I

Admitanta pentru descrierea celulei introduse în acest capitol pentru cazul celulei Chua [71] poate fi scrisa în forma urmatoare:

$$Y(s) = s - g\ f_u - \frac{g^2 f_v g_u}{s - g\ g_v} \quad (10.16.)$$

Când se cupleaza aceste celule într-un singur strat se obtine:

$$(Y(s) - K'_{1D}(m))\hat{u}_m \quad (10.17.)$$

Ecuatia de mai sus devine, pentru cazul CNN cu celule de ordinul II simplu cuplate, urmatoarea:

$$1 - K'_{1D}\frac{s+b}{s^2 + 2a + v_0^2} = 0 \quad (10.18.)$$

în care

$$a = -\frac{g}{2}(f_u + g_v),\ b = -g\ g_v,\ v_0^2 = g^2(f_u g_v - f_v g_u) \quad (10.19.)$$

Utilizând ecuatiile de mai sus se poate schita locul radacinilor (identificându-se cazul respectiv din cazurile prezentate în acest capitol). Mai precis, se izoleaza o regiune din curba locului radacinilor în care *K'*$_{1D}$*(m)* ia valoare (cu ajutorul metodei ferestrei). În consecinta, punctele de pe locul radacinilor pot fi etalonate în valori de moduri.
Câteva dintre ele vor fi plasate în partea din stânga a planului complex, pe când altele se vor afla în partea dreapta a acestui plan. Punctele localizate în partea din dreapta vor corespunde modurilor instabile pe când cealalta categorie corespunde modurilor stabile.

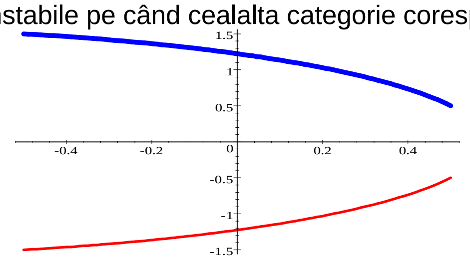


Fig. 39: Locul radacinilor când K'$_{1D}$ este localizat în interiorul intervalului [-0.5 1.5] (echivalentul metodei ferestrei pentru metoda locului radacinilor)

Criteriul Nyquist aplicat pentru studiul CNN-urilor simplu cuplate realizate cu celule de ordinul Q si template-uri de ordinul N

O metoda alternativa la metoda locului radacinilor pentru studiul dinamicii este aceea a criteriului lui Nyquist. Avantajul utilizarii acestei metode apare mai ales în cazul analizei dinamicii CNN-urilor cu template-uri asimetrice.
La baza analizei dinamicii sistemului folosind aceasta metoda sta observatia ca numitorul functiei de transfer pentru fiecare mod poate fi scris sub forma:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} - K_A(m) = 0 \qquad (10.20.)$$

Astfel, se reprezinta în plan complex hodograful functiei complexe Q(s)/P(s) si functia complexa $K_A(m)$. Stabilitatea sistemului este data de pozitia relativa a curbei functiei $K_A(m)$ fata de hodograful lui Q(s)/P(s). Un exemplu se da în figura de mai jos:

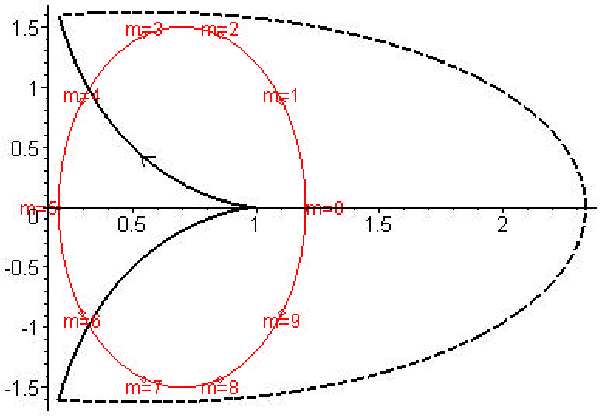


Fig. 40: Ilustrarea criteriului lui Nyquist pentru $K_A(m)$ complex ($Q(s)/P(s)=(s^2+s+1)/(s+1)$; A=[-0.5,0.7,1])

Câteva consideratii privind sinteza de „filtre pieptene"

Pentru CNN-ul realizat cu ajutorul celulelor de ordin 1 si template de ordinul N, se poate face observatia ca alegerea elementelor template-urilor pentru o anumita dinamica dorita se poate face mai usor, având în vedere observatia ca functiile de transfer pentru fiecare mod au forma:

$$H_m(s) = \frac{K_B(m)}{\frac{Q(s)}{P(s)} - K_A(m)} \qquad (10.21.)$$

Pentru cazul celulei de ordinul 1, Q(s)/P(s)=s. Prin urmare, radacinile polinomului caracteristic (valorile proprii temporale) vor fi egale cu cele spatiale:

$$l_m = K_A(m) \qquad (10.22.)$$

Când template-ul este complet (toate celulele vecine influenteaza celula curenta) coeficientii template-ului si valorile proprii temporale ale sistemului sunt perechi Fourier.

$$l_m = \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{j\frac{2p}{M}mk} \qquad (10.23.)$$

Daca se lucreaza cu o dimensiune a template-ului mai mica (M > 2N+1) atunci este ca si cum template-ul se înmulteste cu o fereastra de "largime" 2N+1 formata numai din valori unitare (îl lasa neschimbat).
Se poate face astfel "asezarea" radacinilor polinomului caracteristic dupa cum se doreste, se calculeaza transformata Fourier inversa a acestora obtinându-se template-ul complet. Daca radacinile polinomului caracteristic au fost alese sa fie complex conjugate, template-ul rezultat va fi real.
Pentru a se trece la un template de dimensiune mai mica se înmulteste template-ul rezultat din calculul transformatei Fourier inverse cu fereastra de latime 2N+1 centrata pe elementul cu indice 0 al template-ului. În domeniul transformat, conform figurii de mai jos, înmultirii din domeniul spatiu îi corespunde produsul de convolutie. Se aseaza astfel, pentru a se obtine radacinile polinomului caracteristic corespunzator template-ului redus "sinusul atenuat" rezultat în dreptul fiecarei pozitii în care exista radacina a polinomului caracteristic si se înmulteste cu spectrul complex al template-ului neredus.

Mecanismul este exemplificat în figura de mai jos:

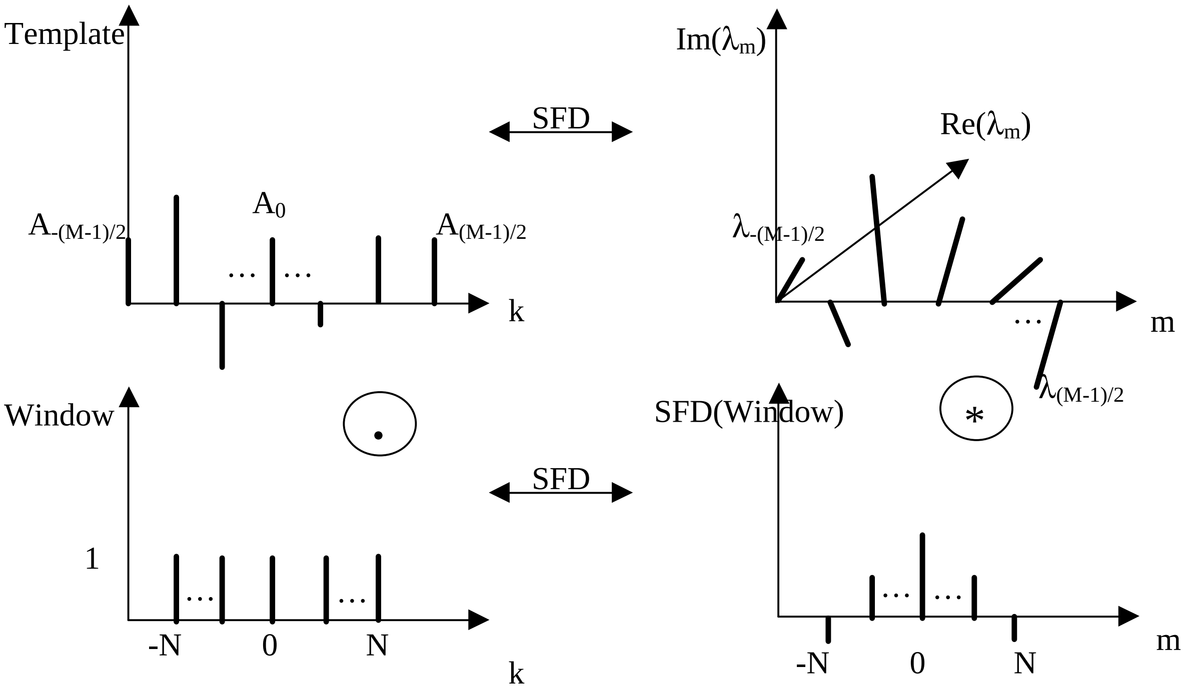


Fig. 41: Ilustrarea corespondentei template-valori proprii temporale pentru CNN cu celule de ordinul I si template de ordin r=N

De exemplu, daca initial se aleg toate radacinile egale cu zero cu exceptia uneia reala corespunzatoare lui m=0 atunci calculând inversul seriei Fourier, se obtine un template real si simetric cu toate elementele reale si egale. Produsul dintre acest template si fereastra de latime 2N+1 se transforma în domeniul frecventa în convolutie, asezând în dreptul valorii proprii cu valoarea m=0 seria Fourier corespunzatoare ferestrei.

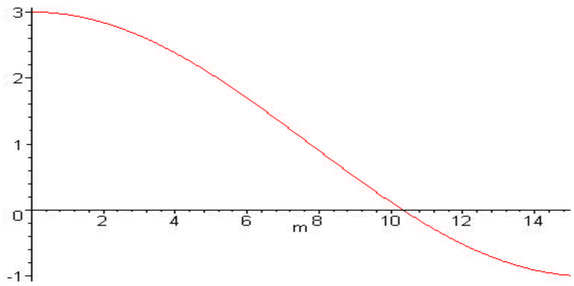
În acest caz este valabila ecuatia care da valorile proprii ale sistemului:

$$l_m = \frac{\sin\left(\frac{mp(2N+1)}{M}\right)}{\sin\left(\frac{mp}{M}\right)} \tag{10.24.}$$

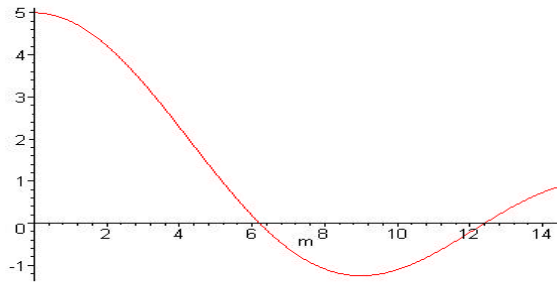
Modurile pentru care $?_m$>0, se vor dezvolta, iar cele pentru care $?_m$<0 vor fi "atenuate" de catre sistem.
Prin urmare, alternativ, între radacinile ecuatiei $?_m$=0 se vor afla zone în care $?_m$ îsi schimba semnul. Situatiile în care numaratorul valorilor proprii temporale se anuleaza sunt cele pentru care:

$$mp(2N+1)/M = kp \tag{10.25.}$$

pentru k intreg.
Se întrevede astfel posibilitatea de a proiecta un CNN (cu un numar de celule prestabilit) ce are o comportare de tip "filtru pieptene" alegând adecvat dimensiunea template-ului N.
În continuare se dau câteva forme pentru curba de dispersie, în functie de dimensiunea template-ului considerat. S-a considerat un CNN cu 31 celule.



m=0	3	m=8	0.898702
m=1	2.95906	m=9	0.498695
m=2	2.837916	m=10	0.119212
m=3	2.641527	m=11	-0.22421

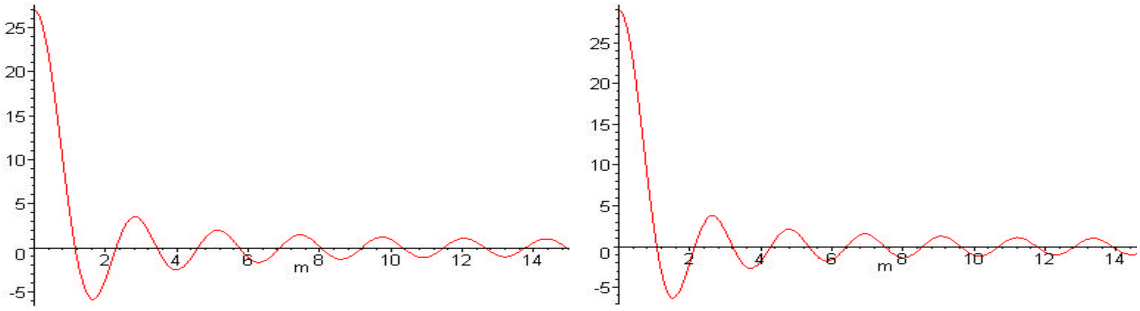


m=0	5	m=8	-1.09104
m=1	4.796976	m=9	-1.25
m=2	4.215849	m=10	-1.105
m=3	3.336137	m=11	-0.72552

m=4	2.377934	m=12	-0.51752
m=5	2.057928	m=13	-0.74869
m=6	1.694611	m=14	-0.90828
m=7	1.302856	m=15	-0.98974

m=4	2.276636	m=12	-0.21466
m=5	1.17714	m=13	0.309235
m=6	0.177094	m=14	0.733248
m=7	-0.60542	m=15	0.969321

Fig. 42 Curba de dispersie pentru vecinatate r=1 si respectiv r=2



m=0	27	m=8	0.139582
m=1	3.898017	m=9	-0.6137
m=2	-3.60059	M=10	0.931811
m=3	3.13249	M=11	-1.07827
m=4	-2.53253	M=12	1.054083
m=5	1.849992	M=13	-0.87663
m=6	-1.14022	M=14	0.577933
m=7	0.459588	M=15	-0.20156

m=0	29	m=8	-1.37793
m=1	1.989739	m=9	1.224212
m=2	-1.95906	m=10	-1.05793
m=3	1.908279	m=11	0.880788
m=4	-1.83792	m=12	-0.69461
m=5	1.748693	m=13	0.501305
m=6	-1.64153	m=14	-0.30286
m=7	1.517516	m=15	0.101298

Fig. 43Curba de dispersie pentru vecinatate r=13 si respectiv r=14

Valorile proprii prezentate mai sus sunt valabile în cazul în care radacina initiala reala a polinomului caracteristic corespunzator sistemului cu template complet era egala cu 1. Daca radacina îsi schimba semnul, atunci graficele de mai sus se inverseaza. Se dau exemplele pentru r=2 si r=14 mai jos, pentru o radacina reala egala cu –1:

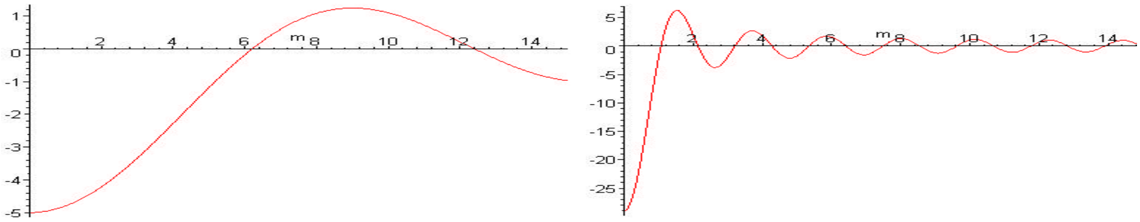
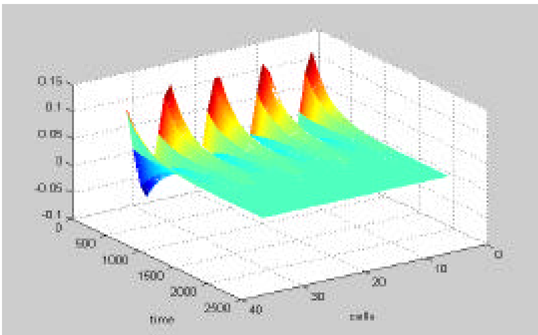
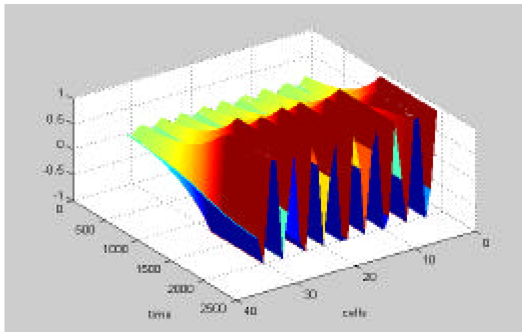


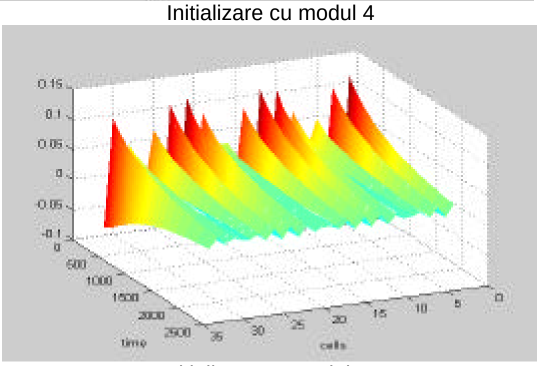
Fig. 44Curba de dispersie pentru vecinatate r=2 si respectiv r=14 (radacina initiala reala egala cu –1)



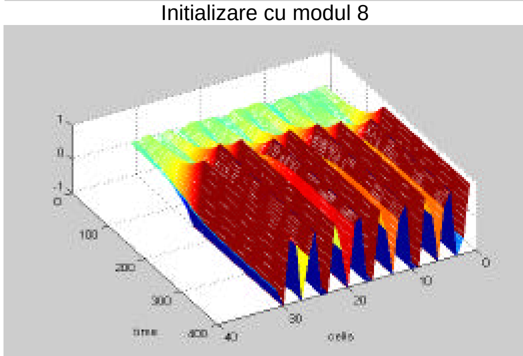
Initializare cu modul 4



Initializare cu modul 8

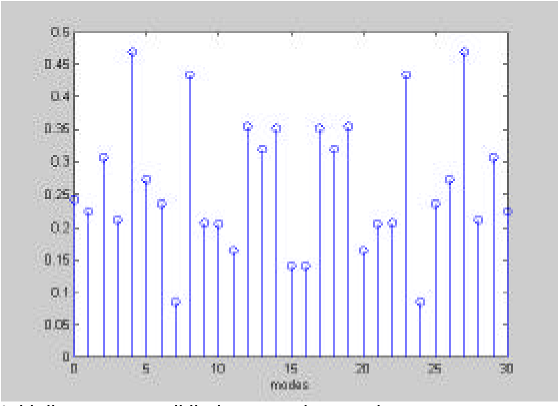


Initializare cu modul 14

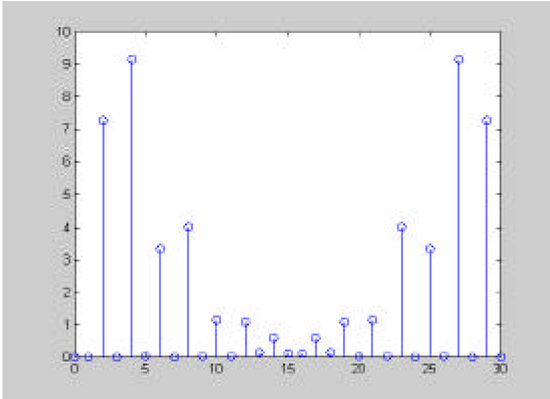


Initializare cu conditii initiale aleatoare

Fig. 45 :Rezultatele simularii sistemului cu diferite tipuri de conditii initiale pentru r=2 si radacina initiala reala egala cu –1. A=[-0.0323 -0.0323 -0.0323 -0.0323 -0.0323]



Initializare cu conditii aleatoare (spectru)



Spectru semnal spatial înainte de intrarea în neliniaritate

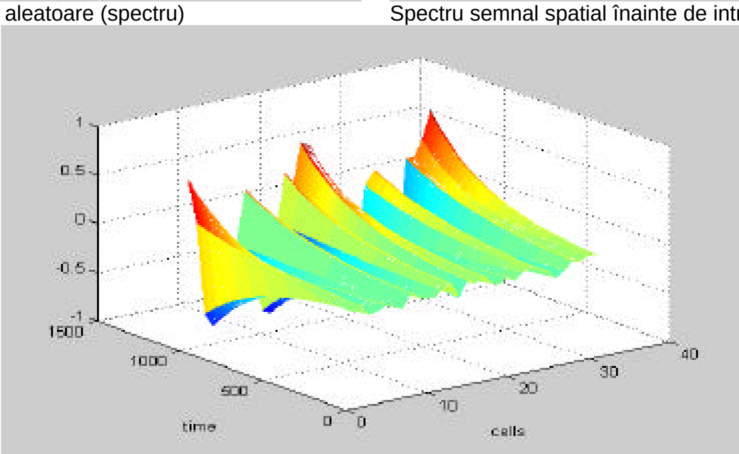


Fig. 46:Rezultatele simularii sistemului pentru r=14 si radacina initiala[11] reala egala cu –1. A=[-0.0323 -0.0323 …. 0.9677… -0.0323 -0.0323]

Se observa ca initial starea a fost initializata cu un semnal aleator si din acesta au ramas în urma evolutiei sistemului doar modurile 2, 4, 6, 8, 10, 12, si 14, fapt ce concorda curbei de dispersie corespunzatoare.

Capitolul 11.: Consideratii cu privire la simularea sistemelor autonome de tip CNN realizate cu celule de ordin Q si template de ordin N

În acest capitol se va prezenta modul în care a fost construit un simulator pentru CNN-uri din clasa mai sus mentionata. Simularea acestui tip de sisteme se bazeaza pe algoritmul Euler cu pas constant, în conditiile teoremei de existenta si unicitate a solutiei.

Descriere matematica pentru CNN-urile 1D

Ecuatia de functionare a celulei din pozitia i este:

$$Y(s)x_i(t) = \sum_{k \in N} A_k y_{i+k}(t) \qquad (11.1.)$$

în care Y(s) are expresia generala:

$$Y(s) = \frac{q_Q s^Q + q_{Q-1} s^{Q-1} + \ldots + q_1 s + q_0}{p_{Q-1} s^{Q-1} + p_{Q-2} s^{Q-2} \ldots + p_1 s + p_0} \qquad (11.2.)$$

Prin urmare, ecuatia de functionare a celulei de la pozitia i din retea va avea urmatoarea forma:

$$\begin{aligned} & q_Q \frac{dx_i^{Q}(t)}{dt^Q} + q_{Q-1} \frac{dx_i^{Q-1}(t)}{dt^{Q-1}} + \ldots + q_1 \frac{dx_i(t)}{dt} + q_0 x_i(t) = \\ & = \sum_{k \in N} A_k \left(p_{Q-1} \frac{dy_{i+k}^{Q-1}(t)}{dt^{Q-1}} + p_{Q-2} \frac{dy_{i+k}^{Q-2}(t)}{dt^{Q-2}} + \ldots + p_1 \frac{dy_{i+k}(t)}{dt} + p_0 y_{i+k}(t) \right) \end{aligned} \qquad (11.3.)$$

[11] Pentru template "complet"

Se fac urmatoarele notatii:

$$\begin{cases} x_0^i(t) = x_i(t) \\ x_1^i(t) = \dfrac{dx_i(t)}{dt} = \dot{x}_0^i(t) \\ \ldots \\ x_{Q-2}^i(t) = \dfrac{d^{Q-2}x_i(t)}{dt^{Q-2}} = \dot{x}_{Q-3}^i(t) \\ x_{Q-1}^i(t) = \dfrac{d^{Q-1}x_i(t)}{dt^{Q-1}} = \dot{x}_{Q-2}^i(t) \end{cases} \quad (11.4.)$$

Cu aceasta, ecuatia de mai sus se poate scrie în forma echivalenta:

$$\begin{cases} \dot{x}_0^i(t) = x_1^i(t) \\ \dot{x}_1^i(t) = x_2^i(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_{Q-2}^i(t) = x_{Q-1}^i(t) \\ \dot{x}_{Q-1}^i(t) = \dfrac{1}{q_Q}\left\{RHT^i - q_{Q-1}x_{Q-1}^i(t) - \ldots - q_2x_2^i(t) - q_1x_1^i(t) - q_0x_0^i(t)\right\} \end{cases} \quad (11.5.)$$

în care

$$RHT^i = \begin{cases} \sum_{k\in N} A_k \begin{pmatrix} p_{Q-1}x_{Q-1}^{i+k}(t) + p_{Q-2}x_{Q-2}^{i+k}(t) + \ldots \\ + p_1x_1^{i+k}(t) + p_0x_0^{i+k}(t) \end{pmatrix}, & pt.\ \left|x_0^{i+k}(t)\right| < 1 \\ \sum_{k\in N} A_k \begin{pmatrix} p_{Q-1}x_{Q-1}^{i+k}(t) + p_{Q-2}x_{Q-2}^{i+k}(t) + \ldots \\ + p_1x_1^{i+k}(t) + p_0y(x_0^{i+k}(t)) \end{pmatrix}, & pt.\ \left|x_0^{i+k}(t)\right| > 1 \end{cases} \quad (11.6.)$$

Pentru scopul simularilor efectuate s-a folosit neliniaritatea clasica a CNN-ului (de tip amplificare cu saturatie). Se pot folosi orice alte tipuri de neliniaritati (functii de activare) pentru “complicarea dinamicii sistemului”, în vederea obtinerii de procesari de semnal utile.
Evident, pentru a se realiza simularea sistemului evolutia variabilelor de stare ale acestuia trebuie discretizata în timp. Se obtine astfel varianta discreta în timp a sistemului respectiv, descris de ecuatiile de mai jos:

$$\begin{cases} x_0^i[n+1] = x_0^i[n] + hx_1^i[n] \\ x_1^i[n+1] = x_1^i[n] + hx_2^i[n] \\ \ldots \\ x_{Q-2}^i[n+1] = x_{Q-2}^i[n] + hx_{Q-1}^i[n] \\ x_{Q-1}^i[n+1] = x_{Q-1}^i[n] + \dfrac{h}{q_Q}\left\{RHT^i - q_{Q-1}x_{Q-1}^i[n] - \ldots - q_2x_2^i[n] - q_1x_1^i[n] - q_0x_0^i[n]\right\} \end{cases} \quad (11.7.)$$

Cu RHT^i având aceeasi forma ca mai sus cu exceptia trecerii argumentului t în n, corespunzator discretizarii axei timpului.
Matricial, sistemul de mai sus devine:

$$[X]^i[n+1] = [X]^i[n] + h[X_d]^i[n] \qquad [X]^i[n] = [x_0^i[n]\ x_1^i[n]\ \ldots\ x_{Q-1}^i[n]]^t \quad (11.8.)$$

iar

$$[X_d]^i[n] = \begin{cases} x_1^i[n] \\ x_2^i[n] \\ \ldots \\ x_{Q-1}^i[n] \\ \dfrac{1}{q_Q}\left(RHT^i[n] - \sum_{k=0}^{Q-1} q_kx_k^i[n]\right) \end{cases} \quad (11.9.)$$

Concluzii

În teza de fata s-au studiat diverse arhitecturi de retele neuronale, din punct de vedere al dinamicilor posibile si al stabilitatii. S-a insistat pe raportul dintre ordinul celulei (complexitatea celulei) si ordinul legaturii între celule, punându-se în evidenta prin comparatii avantajele si respectiv dezavantajele unui anume tip de CNN sau al altuia.

În continuare se va prezenta pe scurt problematica abordata în teza, punctându-se contributiile originale.

Definirea notiunilor de lucru:

- s-a început prin delimitarea notiunii de retea neuronala celulara standard si prezentarea unor clase particulare.

Prezentarea unor rezultate importante pe studiul CNN:

- rezultate referitoare la existenta si unicitatea solutiei numerice a ecuatiilor de descriu CNN-ul si legate de marginirea solutiei în legatura directa cu implementarea la nivel de circuit a CNN-ului.

Analiza CNN-ului stabil, functionând atât ca sistem autonom, cât si ca sistem neautonom

- s-au prezentat solutiile ecuatiilor ce descriu CNN-ul cu celula de ordinul 1, cu template de ordin (r) maxim 2, punându-se accentul pe aplicatiile ce vizeaza CNN-urile stabile, ca filtrarea liniara spatiala;
- s-a discutat procesarea de semnal introdus pe stare, respectiv pe intrarea sistemului, corespunzând CNN-ului autonom, respectiv neautonom.

Analiza CNN-ului functionând ca sistem neliniar realizat cu celule de ordin 1 si template de ordin 1 (r=1):

- s-au studiat posibilitatile pe care le ofera acesta când este realizat cu celule de ordinul 1 si template de ordinul 1 (r=1);
- s-a realizat sistematizarea tehnicilor de proiectare de template-uri robuste în vederea realizarii unor procesari de imagine simple. Prin implementarea unor algoritmi în care se folosesc aceste procesari de imagine de baza se obtin altele, mai complexe;
- s-au pus în evidenta cazurile în care este nevoie ca celulele sa fie cuplate (adica elementele din template-ul A diferite de elementul central sa fie nenule). Cu ajutorul clasei de template-uri corespunzatoare se realizeaza procesari de imagine ce implica propagarea informatiei binare din imagine în CNN;
- s-a pus de asemenea în evidenta posibilitatea de a se procesa imagini pe regiuni de interes, folosind o imagine introdusa pe stare si o alta pe intrare.

Prezentarea unor aplicatii la principiile legate de functionarea CNN ca sistem neliniar:

- a fost realizata o exemplificare a principalelor clase de aplicatii legate de procesarea de imagine;
- s-au realizat simulari care ilustreaza principiile prezentate.

S-a realizat prezentarea pe scurt a standardului actual ce descrie limbajul de nivel înalt Alpha, folosit pentru simularea CNN-urilor functionând ca sistem neliniar:

- datorita faptului ca la ora actuala exista prototipuri ale CNN-ului si un limbaj de nivel înalt (ALPHA) care asigura interfata utilizatorului cu partea hardware, s-a prezentat pe scurt acest limbaj. Clasa implementata si folosita la ora actuala este cea a CNN-urilor standard. Din acest motiv, li s-a alocat în cadrul lucrarii de fata un spatiu apreciabil.

În cele ce urmeaza se prezinta contributiile originale legate de CNN functionând ca sistem instabil, autonom:

Functionarea CNN-ului realizat cu ajutorul celulelor de ordinul I si II, simplu si dublu cuplate, cu vecinatate cu maxim r=2:

- s-a prezentat o arhitectura generala a celulei CNN de ordinul 2 (încadrându-se realizarile de circuit prezentate în literatura anterior în aceasta arhitectura);
- s-a studiat CNN-ul ca sistem liniarizat (în jurul originii), cu imaginile introduse pe stare;
- s-a realizat studiul sistemelor obtinute prin cuplarea în simplu si dublu strat a celulelor;
- s-a studiat comportarea CNN-urilor cu celule conectate în dublu strat pentru template-uri diferite pentru cele doua straturi;
- s-au pus în evidenta (folosind curba de dispersie) avantajele si dezavantajele folosirii unei celule de ordin 2 si template de ordinul 1 si respectiv a unei celule de ordin 1 si template de ordin 2 si posibilitatea ca ele sa fie functional echivalate;
- s-a prezentat metodologia de echivalare si s-au facut consideratii referitoare la adecvarea unei metode sau a alteia, în functie de dinamica dorita;
- pe baza analizei acestor tipuri de sisteme (rezolvarea sistemului de ecuatii prin metoda decuplarii variabilelor) s-a schitat si o metodologie de sinteza a lor, folosind metoda ferestrei, valabila în cazul template-urilor simetrice;
- s-a exemplificat sinteza prin proiectarea unor filtre spatiale, ce fructifica functionarea CNN-ului ca sistem instabil;
- s-au realizat simulari ale CNN-urilor cu template-uri proiectate prin metodele mai sus mentionate, verificându-se practic relatiile deduse.
- s-au sistematizat conditiile la limita posibile pentru cazul 1D si respectiv 2D, punându-se în evidenta posibilitatea existentei mai multor tipuri de conditii de granita pentru grantele, respectiv laturile CNN-ului.

<u>Generalizarea metodelor de studiu a stabilitatii pentru clasa de CNN-uri autonome, simplu cuplate, alcatuite din celule de ordin Q si vecinatate de ordin N</u>:

- s-a studiat CNN-ul cu celula de ordin Q si template de ordin r=N, tratându-se, la nivel de sistem celula ca pe un uniport caracterizat de o admitanta Y(s). Aceasta abordare deschide orizontul de studiu al CNN-urilor simplu cuplate, cu celule legate între ele în vecinatati oricât de mari;
- s-a propus utilizarea metodei rapide de trasare a locului radacinilor, cu ajutorul careia s-a studiat stabilitatea CNN-urilor functionând în regiunea centrala liniara;
- pentru cazul template-urilor asimetrice, s-a realizat studiul CNN-urilor cu conditii de granita de tip periodic cu metoda locului radacinilor prin trasarea acestuia cu ajutorul calculatorului;
- s-a propus, ca o alternativa de studiu a stabilitatii la metoda locului radacinilor, criteriul lui Nyquist. Acesta a fost extins pentru valori proprii spatiale complexe, ce corespund template-urilor asimetrice, folosind teorema lui Cauchy;
- metodele bazate pe criteriul lui Nyquist si locul radacinilor au fost ilustrate prin simularea pe calculator a unor cazuri particulare;
- pentru CNN-rile cu celule de ordinul 2, simplu cuplate si a template-urilor simetrice s-a realizat o identificare a parametrilor de circuit ai celulei generale cu cei de sistem folositi la studiul cu ajutorul locului radacinilor, punându-se în evidenta concordanta rezultatelor obtinute prin cele doua metode.

<u>Descrierea unei metodologii de proiectare de template-uri pentru clasa de CNN-uri autonome, simplu cuplate, alcatuite din celule de ordin 1 si vecinatate de ordin N:</u>

- folosind celule de ordin 1 si template-uri de ordin r=N s-a propus o metodologie de proiectare a template-urilor (simetrice sau nu), pornind de la observatia ca radacinile polinomului caracteristic si valorile template-ului complet (în care fiecare celula este legata direct cu celelalte) sunt perechi Fourier;
- s-a dat un exemplu de proiectare pentru un caz simplu, realizându-se în functie de raza de influenta filtre de tip pieptene cu un numar variabil de "dinti";
- s-au realizat simulari ce verifica functionarea ca filtru pieptene a sistemului proiectat;
- s-a descris modul în care a fost construit simulatorul cu care s-au facut verificarile practice ale contributiilor descrise în lucrare;

Bibliografie selectiva

[1] L.O.Chua, L. Yang – "Cellular Neural Networks: Theory", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 35, number 10, October 1988,pp 1257-1272
[2] L.O.Chua, L. Yang – "Cellular Neural Networks: Applications", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 35, number 10, October 1988,pp 1273-1288
[3] D.M.W. Leenaerts – „On Flash AD conversion", Proceedings of IEEE International Symposium on Signals Circuits and Systems, (SCS'99), pp.37-41., Iasi - Romania, 1999
[4] R. Dogaru, L.O. Chua, A.T. Murgan, "Secure Communication Based on Binary Sinchronization of Chaos in Cellular Neural Networks", Proceedings of IEEE International Symposium on Signals Circuits and Systems, (SCS'97), Vol.1. 97-100, Iasi - Romania, 1997
[5] R. Dogaru and L. O. Chua, "Edge of Chaos and Local Activity Domain of FitzHugh-Nagumo Equation", Int. Journal of Bifurcation and Chaos, (Int. J. Bifurcation and Chaos), Vol. 8, No. 2, pp. 211-257, World Scientific Publishing Company, ISSN 0218-1274, 1998
[6] D.M.W. Leenaerts, "On Traveling and Solitary Waves in Modified Nagumo Equations", Proceedings of IEEE International Symposium on Signals Circuits and Systems, (SCS'97), Vol.1. pp.93-96., Iasi - Romania, 1997
[7] L. O. Chua, "A Vision of Complexity", Int. Journal of Bifurcation and Chaos, (Int. J. Bifurcation and Chaos), Vol. 7, No.10, pp. 2219-2425, World Scientific Publishing Company, ISSN 0218-1274, 1997
[8] *** - "Cellular Neural Networks", Edited by T. Roska and J. Vandewalle, J. Wiley & Sons, 1996, England"
[9] V. Cimagalli, M. Balsi – "Cellular Neural Networks: A Review", Proceedings of Sixth Italian Workshop on Parallel Architectures and Neural Networks, Vietri sul Mare, Imay 12-14, 1993, Italy
[10] L.O.Chua, Tamas Roska – "Cellular Neural Networks: Foundations and Primer", version 1.5, lecture notes for the course EE129 at U.C.Berkeley, 1997
[11] Leon O. Chua, "Local Activity: The Origin of Complexity", Proceedings of IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications, (CNNA'98), pp.2, London, 1998
[12] A. Zarandy, „ACE Box: High-performance Visual Computer based on the ACE4k Analogic Array Procesor Chip", Proceedings of 15'th European Conference on Circuit Theory and Design, (ECCTD'01), Espoo, Finland, 2001, pp. I-361-I-365
[13] G. Linan, R. D. Castro, S. Espejo, A.Rodriguez-Vazquez, „ACE16k: A Programmable Focal Plane Vision Processor with 128 x 128 Resolution", Proceedings of 15'th European Conference on Circuit Theory and Design, (ECCTD'01), Espoo, Finland, 2001, pp. I-345-I-349
[14] T. Roska, L.O.Chua – "The CNN Universal Machine (CNN-UM) Array Computer Architecture for Multimedia and Intelligent Sensors – Hardware and Software Design Issues – A Tutorial", Special Issue ECCTD'97, Budapest, 1997, Hungary, pp. 88-104
[15] T. Roska and L. O Chua, "The CNN Universal Machine (CNN-UM) array computer architecture for multimedia and intelligent sensors - hardware and sorfware design issues, A Tutorial", European Conference on Circuit Theory and Design - ECCTD'97, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'97-DAD), pp.88-104, Budapest, Budapest, 1997
[16] P. Földesy, P. Szolgay, "A CNN engine board", ECCTD-97, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'97-DAD), pp. 199-204, Budapest, 1997
[17] Á. Rodriguez-Vázquez, S. Espejo, R. Dominguez-Castro, and G. Linan, "The 64x64 Analog Input CNN Universal Machine Chip and its ARAM", Proceedings of International Symposium on Nonlinear Theory and Applications, (NOLTA'98), pp. 667-670, Le Régent, Switzerland, 2-88074-391-5, 1998
[18] T. Roska, "Implementation of CNN Computing Technology", Proceedings of 7th Int. Conference Artifical Neural Networks, (ICANN'97),
pp.1151-1155, Lausanne, 1997
[19] Á. Zarándy, T. Roska, P. Szolgay, P. Földesy, S. Zöld, "A Development System for Prototyping and Interfacing CNN Chips and for Analogic Algorithm Design, Chapter 6.1.", Toward the Visual Microprocessor - VLSI Design and Use of Cellular Network Universal Machines, (Toward the Visual Microprocessor), T.Roska and A.Rodriguez-Vázquez, J.Wiley, 1997
[20] T. Roska , A. Radványi, T. Szirányi, P. Szolgay, P. Venetianer, "A CNN Application Development and Toolkit", Toward the Visual Microprocessor - VLSI Design and Use of Cellular Network Universal Machines, (Toward the Visual Microprocessor), T.Roska and A.Rodriguez-Vázquez, J.Wiley, 1997
[21] A. Paasio, A. Kananen and V. Porra, "A 176 x 144 processor binary I/O CNN-UM chip design", European Conference on Circuit Theory and Design - ECCTD'99, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'99-DAD), Stresa, Italy, 1999
[22] Á. Zarándy, T. Roska, P. Szolgay, S. Zöld, P. Földesy and I. Petrás, "CNN Chip Prototyping and Development Systems", European Conference on Circuit Theory and Design - ECCTD'99, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'99-DAD), Stresa, Italy, 1999
[23] K.R. Crounse, "Ph. Thesis: Image Processing Techniques for Cellular Neural Network Hardware", University of California, Berkeley, Fall, 1997
[24] K.R.Crounse, L.O. Chua – "Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks – A Tutorial", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Special Issue on Nonlinear Waves, Patterns and Spatio-Temporal Chaos in Dynamic Arrays, vol. 42, number 10, October 1995, pp. 583-601
[25] L.O. Chua, M. Hasler, G. S. Moschytz and J. Neirynck – "Autonomous Cellular Neural Networks: A Unified Paradigm for Pattern Formation and Active Wave Propagation",IEEE Transactions on Circuits and Systems, Special Issue on Nonlinear Waves, Patterns and Spatio-Temporal Chaos in Dynamic Arrays, vol. 42, number 10, October 1995, pp. 559-577

[26] Á. Zarándy, "The Art of CNN Template Design", Int. J. Circuit Theory and Applications - Special Issue: Theory, Design and Applications of Cellular Neural Networks: Part II: Design and Applications, (CTA Special Issue - II), Vol.17, No.1, pp.5-24, 1999
[27] A. Zarandy, T. Roska – "CNN Template Design Strategies and Fault Tolerant CNN Template Design – A Survey, Special Issue ECCTD'97, Budapest, 1997, Hungary, pp. 178-201
[28] Á. Zarándy, "The Art of binary CNN template design", Research report of the Analogic (Dual) and Neural Computing Systems Laboratory, (DNS-8-1997), Budapest, MTA SZTAKI, 1997
[29] M. Gilli, "Template Design Methodologies and Tools", European Conference on Circuit Theory and Design - ECCTD'99, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'99-DAD), Stresa, Italy, 1999
[30] P. Földesy, L. Kék, T. Roska, Á. Zarándy, T. Roska and G. Bártfai, "Fault Tolerant Design of Analogic CNN Templates and Algorithms - Part I: The Binary Output Case", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Special Issue on Bio-Inspired Processors and Cellular Neural Networks for Vision, (CAS-I Special Issue), Vol. 46, No.2, pp. 312-322, 1999
[37] R. Tetzlaff, R. Kunz, G. Geis, "Analysis of Cellular Neural Networks with Parameter Deviations", Proceedings of 13 European Conference on Circuit Theory and Design, (ECCTD'97), Vol.2. pp. 650-654, Budapest, 1997
[38] J.A. Nossek, "Design and Learning with Cellular Neural Networks", Int. J. Circuit Theory and Applications, (CTA), Vol.24. issue 1. pp. 15-24., 1996,
[39] M. Hanggi and G. S. Moschytz, "An Exact and Direct Analytical Method for the Design of Optimally Robust CNN Templates", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Special Issue on Bio-Inspired Processors and Cellular Neural Networks for Vision, (CAS-I Special Issue), Vol.46, No.2, pp. 304-311, 1999
[40] M. Hanggi and G. S. Moschytz, "Making CNN Templates Optimally Robust", Proceedings of International Symposium on Nonlinear Theory and Applications, (NOLTA'98), Vol. 3, pp. 935-938, Le Régent, Switzerland, 2-88074-391-5, 1998
[41] B. Chandler, Cs. Rekeczky, Y. Nishio and A. Ushida, "Adaptive Simulated Annealing in CNN Template Learning", IEICE (Japan) Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, (IEICE), Vol. E82-A, No.2. Pp. 398-402, 1999
[42] I. Fajfar, F. Bratkovic, T. Tuma and J. Puhan, "A Rigorous Design Method for Binary Cellular Neural Networks", Int. J. Circuit Theory and Applications, (CTA), Vol. 26, No,.4, pp. 365-373, 1998
[43] L. Nemes, L. O. Chua, T. Roska, "Implementation of Arbitrary Boolean Functions on the CNN Universal Machine", Int. J. Circuit Theory and Applications - Special Issue: Theory, Design and Applications of Cellular Neural Networks: Part I: Theory, (CTA Special Issue - I), Vol. 26. No. 6, pp. 593-610, guest ed: T. Roska, A. Rodriguez-Vazquez and J. Vandewalle, 1998
[44] Analogical and Neural Computing Laboratory, Hungarian Academy of Sciences – "CNN Software Library (Templates and Algorithms)", version 7.3, Budapest, 1999, Hungary
[45] Analogical and Neural Computing Laboratory, Hungarian Academy of Sciences – "CNN Alpha Language and Compiler", version 3.0G, Budapest, 2000, Hungary
[46] S. Zöld, "CNN Alpha Language and Compiler", Research report of the Analogic (Dual) and Neural Computing Systems Laboratory, (DNS-10-1997), Budapest, MTA SZTAKI, 1997
[47] P. Szolgay, K. László, L. Kék, T. Kozek, L. Nemes, I. Petrás, Cs. Rekeczky, I. Szatmári, Á. Zarándy, S. Töld and T. Roska, "The CADETWin Application Software Design System - A Tutorial", European Conference on Circuit Theory and Design - ECCTD'99, Design Automation Day proceedings, (ECCTD'99-DAD), Stresa, Italy, 1999
[48] T. Roska, P. Szolgay, T. Kozek, Á. Zarándy, Cs. Rekeczky, L. Nemes, L. Kék, K.László, I.Szatmári, M.Csapodi, "CADETWIN", Budapest, MTA SZTAKI, 1997
[49] Analogical and Neural Computing Laboratory, Hungarian Academy of Sciences – "MATCNN – Analogic CNN Simulation Toolbox for MATLAB", version 1.0, Budapest, 1998, Hungary
[50] Cs. Rekeczky, "MATCNN - Analogic CNN Simulator Toolbox for Matlab, Version 1.0", Research report of the Analogic (Dual) and Neural Computing Systems Laboratory, (DNS-11-1997), Budapest, MTA SZTAKI, 1997
[51] Analogical and Neural Computing Laboratory, Hungarian Academy of Sciences – "CadetWin'99 - System Identification: Objectives, Architecture and Components", version 3.0, Budapest, 1999, Hungary
[52] T. Roska, Á. Zarándy, S. Zöld, P. Földesy and P. Szolgay, "The Computational Infrastructure of Analogic CNN Computing - Part I: The CNN-UM Chip Prototyping System", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Special Issue on Bio-Inspired Processors and Cellular Neural Networks for Vision, (CAS-I Special Issue), Vol. 46, No.2, pp. 261-268, 1999
[53] L. Goras, L.O.Chua and D.M.W. Leenaerts – "Turing Patterns in CNN's – Part I: Once Over Lightly", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Special Issue on Nonlinear Waves, Patterns and Spatio-Temporal Chaos in Dynamic Arrays, vol. 42, number 10, October 1995, pp. 602-611
[54] L. Goras, L.O.Chua – "Turing Patterns in CNN's – Part II: Equations and Behaviors", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Special Issue on Nonlinear Waves, Patterns and Spatio-Temporal Chaos in Dynamic Arrays, vol. 42, number 10, October 1995, pp. 612-626
[55] L. Goras, L.O.Chua, L. Pivka – "Turing Patterns in CNN's – Part III: Computer Simulation Results", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Special Issue on Nonlinear Waves, Patterns and Spatio-Temporal Chaos in Dynamic Arrays, vol. 42, number 10, October 1995, pp. 627-637
[56] L. Goras, L. Chua, "Turing Patterns in CNN's Based on a New Cell", Proceedings of IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications, (CNNA'96), pp.103-108, Sevilla, 1996,
[57] P. Thiran, K.R. Crounse, L.O. Chua, and M. Hasler, "Pattern Formation Properties of Autonomous Cellular Neural Networks", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, (CAS-I), Vol. 42. No. 10. pp. 757-774, 1995,

[58] K.R. Crounse and L. O. Chua, "Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks: A Turorial", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, (CAS-I), Vol. 42. No.10. pp. 583-601, 1995,
[59] L.Goras, L.O.Chua, "On the Influence of CNN Boundary Conditions in Turing Pattern Formation", Proc. of the European Conference on Circuit Theory and Design, ECCTD'97, Budapesta, 1997, pp 383-388;
[60] L. Goras, **T. Teodorescu**, "On CNN Boundary Conditions in Turing Pattern Formation", Proc. of the Fifth International Workshop on Cellular, Neural Networks and Their Applications, CNNA'98, pp.112-117, London, UK, 14-17 April, 1998;
[61] R. Matei, L. Goras, "On the Discrete Simulation of 1D CNN's Proceedings of SCS'97", pp. 113-117
[62] **T. Teodorescu** and L. Goras, "On the Dynamics of Turing Pattern Formation in 1D CNN's", Proceedings of IEEE International Symposium on Signals Circuits and Systems, (SCS'97), Vol.1. pp.109-112, Iasi - Romania, 1997
[63] L. Goras and L.O. Chua, "On the Role of CNN's Initial Conditions in Turing Patterns Formation", Proceedings of IEEE International Symposium on Signals Circuits and Systems, (SCS'97), Vol.1. 105-108, Iasi - Romania, 1997
[64] L. Goras and L.O. Chua, "On the Influence of CNN Boundary Conditions in Turing Pattern Formation", Proceedings of 13 European Conference on Circuit Theory and Design, (ECCTD'97), Vol. 1. pp. 383-386, Budapest, 1997
[65] B. Mirzai and G.S. Moschytz, "The Influence of the Boundary Conditions on the Robustness of a CNN", IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, (CAS-I), Vol. 45. No.4. pp.511-515, 1998
[66] T. Serrano-Gotarredona and A. Rodriguez-Vázquez, "On the Design of Second Order Dynamics Reaction-Diffusion CNNs", Journal of VLSI Signal Processing Special Issue: Spatiotemporal Signal Processing with Analogic CNN Visual Microprocessors, (JVSP Special Issue), Kluwer, 1999 November, December
[67] P. Arena, L. Fortuna, G. Manganaro, "A CNN Cell for Pattern Formation and Active Wave Propagation", Proceedings of 13 European Conference on Circuit Theory and Design, (ECCTD'97), pp. 371-376, Budapest, 1997
[68] P. Arena, S. Bagilo, L. Fortuna, G. Manganaro, "Complexity in a Two-Layer CNN", Proceedings of IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications, (CNNA'96), pp.127-132, Sevilla, 1996,
[69] **T. Teodorescu**, L. Goras - "Cell and Template Order Influence on CNN Behavior - A Comparative Study", ECCTD 2001, Espoo, Finland
[70] L. Goras, **T. Teodorescu** - "On the Oscillatory Behavior of Second Order Cell 1D CNN's", ECCTD 2001, Espoo, Finland
[71] L. Goras, **T. Teodorescu** - "On the Dynamics of a Class of CNN", SCS 2001, Iasi, Romania
[72] **T. Teodorescu**, L. Goras - "Two Approaches for Studying Single Coupled Second Order CNN", SCS 2001, Iasi, Romania
[73] L. Goras, **T. Teodorescu**, A. Maiorescu - "Phase Influence on Mode Competition in Turing Pattern Formation", CNNA2000, Catania, Italy
[74] **T. Teodorescu**, A. Maiorescu - "Using Different Bias Current Sources for Controlling Turing Patterns", ECCTD99, Stressa, Italy
[75] **T. Teodorescu**, A. Maiorescu - "Some image processing features of the second order Hysteretic Cellular Neural Networks", ATEE98, Bucharest, Romania
[76] L. Goras, R. Ghinea, **T. Teodorescu**, E. David – „On the Dynamics of a Class of Cellular Neural Networks”, trimisa la CNNA2002, Frankfurt, Germania
[77] L. Goras, **T. Teodorescu**, R. Ghinea, E. David – „On Pattern Formation in a Class of Cellular Neural Networks”, trimisa ICSCC2002, St. Petersburg, Rusia

Tipul conditiei de granita	$\Phi_M(w(m), j\,(m), i)$	$w(m)$	$j\,(m)$	K_{1D}
periodic	$e^{j\frac{2p}{M}mi}$	$\frac{2p}{M}m$	0	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{2p}{M}m$
zf-zf	$\cos\frac{(2i+1)}{2M}mp$	$\frac{p}{M}m$	$\frac{p}{2M}m$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{M}m$
azf-azf	$\sin\frac{(2i+1)(m+1)p}{2M}$	$\frac{p}{M}(m+1)$	$\frac{p}{2M}(m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{M}(m+1)$
z-z	$\sin\frac{(i+1)(m+1)p}{M+1}$	$\frac{p}{M+1}(m+1)$	$\frac{p}{M+1}(m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{M+1}(m+1)$
qzf-qzf	$\cos\frac{mip}{M-1}$	$\frac{p}{M-1}m$	0	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{M-1}m$
azf-zf	$\sin\frac{(2i+1)(2m+1)p}{4M}$	$\frac{p}{2M}(2m+1)$	$\frac{p}{4M}(2m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{2M}(2m+1)$
z-zf	$\sin\frac{(i+1)(2m+1)p}{2M+1}$	$\frac{p}{2M+1}(2m+1)$	$\frac{p}{2M+1}(2m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{2M+1}(2m+1)$
z-qzf	$\sin\frac{(i+1)(2m+1)p}{2M}$	$\frac{p}{2M}(2m+1)$	$\frac{p}{2M}(2m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{2M}(2m+1)$
azf-qzf	$\sin\frac{(2i+1)(2m+1)p}{2(2M-1)}$	$\frac{p}{2M-1}(2m+1)$	$\frac{p}{2(2M-1)}(2m+1)\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{p}{2M-1}(2m+1)$
z-azf	$\sin\frac{2(i+1)(m+1)p}{2M+1}$	$\frac{2p}{2M+1}(m+1)$	$\frac{2p}{2M+1}(m+1)$	$A_0 + 2A_1 \cos\frac{2p}{2M+1}(m+1)$

Anexa 1: Functii si valori proprii pentru diferite tipuri de conditii de granita (1D)

Tipul conditiei de granita	$\Phi_{MN}(\omega_x(m),\varphi_x(m), \omega_y(n), \varphi_y(n),i,j)$	$\omega_x(m)$	$\varphi_x(m)$	$\omega_y(n)$	$\varphi_y(n)$
azf-azf-azf-azf	$\sin\frac{(2i+1)(m+1)p}{2M}\sin\frac{(2j+1)(n+1)p}{2N}$	$\frac{p}{M}m$	$\frac{(m+1)p}{2M}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$\frac{(n+1)p}{N}$	$\frac{(n+1)p}{2N}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
z-z-z-z	$\sin\frac{(i+1)(m+1)p}{M+1}\sin\frac{(j+1)(n+1)p}{2N}$	$\frac{p}{M+1}(m+1)$	$\frac{(m+1)p}{M+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$\frac{(n+1)p}{N+1}$	$\frac{(n+1)p}{N+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
qzf-qzf-qzf-qzf	$\cos\frac{mip}{M-1}\cos\frac{njp}{N-1}$	$\frac{p}{M-1}m$	0	$\frac{np}{N-1}$	0
zf-zf-zf-zf	$\cos\frac{(2i+1)mp}{2M}\cos\frac{(2j+1)np}{2N}$	$\frac{p}{M}m$	$\frac{mp}{2M}$	$\frac{np}{N}$	$\frac{np}{2N}$
r-r-r-r	$e^{j\frac{2p}{M}mi}e^{j\frac{2p}{N}nj}$	$2pm/M$	0	$2np/N$	0
qzf-qzf-z-z	$\cos\frac{mip}{M-1}\sin\frac{(n+1)(j+1)p}{N+1}$	$\frac{p}{M-1}m$	0	$\frac{(n+1)p}{N+1}$	$\frac{(n+1)p}{N+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
azf-azf-z-z	$\sin\frac{(2i+1)(m+1)p}{2M}\sin\frac{(j+1)(n+1)p}{N+1}$	$\frac{p}{M}(m+1)$	$\frac{(m+1)p}{2M}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$\frac{(n+1)p}{N+1}$	$\frac{(n+1)p}{N+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
z-z-zf-zf	$\sin\frac{(i+1)(m+1)p}{M+1}\cos\frac{(2j+1)np}{2N}$	$\frac{p}{M+1}(m+1)$	$\frac{(m+1)p}{M+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$\frac{np}{N}$	$\frac{np}{2N}$
zf-zf-azf-azf	$\cos\frac{(2i+1)mp}{2M}\sin\frac{(2j+1)(n+1)p}{2N}$	$\frac{p}{M}m$	$\frac{mp}{2M}$	$\frac{(n+1)p}{N}$	$\frac{(n+1)p}{2N}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
zf-zf-qzf-qzf	$\cos\frac{(2i+1)mp}{2M}\cos\frac{njp}{N-1}$	$\frac{p}{M}m$	$\frac{mp}{2M}$	$\frac{np}{N-1}$	0
qzf-qzf-azf-azf	$\cos\frac{mip}{M-1}\sin\frac{(2j+1)(n+1)p}{2N}$	$\frac{p}{M-1}m$	0	$\frac{(n+1)p}{N}$	$\frac{(n+1)p}{2N}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$
z-zf-azf-qzf	$\sin\frac{(i+1)(2m+1)p}{2M+1}\sin\frac{(2j+1)(2n+1)p}{2(2N-1)}$	$\frac{p}{2M+1}(2m+1)$	$\frac{(2m+1)p}{2M+1}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$	$\frac{(2n+1)p}{2N-1}$	$\frac{(2n+1)p}{2(2N-1)}\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

Functii proprii pentru diferite tipuri de conditii de granita (2D)

Tipul conditiei de granita	K_{2D}
azf-azf-azf-azf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M}m)\cos\frac{(n+1)p}{N} + 2A_{0,-1}\cos\frac{(n+1)p}{N}$
z-z-z-z	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M+1}(m+1)) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M+1}(m+1))\cos(\frac{(n+1)p}{N+1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(n+1)p}{N+1})$
qzf-qzf-qzf-qzf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M-1}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M-1}m)\cos(\frac{np}{N-1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{np}{N-1})$
zf-zf-zf-zf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M}m)\cos(\frac{np}{N}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{np}{N})$
r-r-r-r	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{2p}{M}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{2p}{M}m)\cos(\frac{2np}{N}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{2np}{N})$
Qzf-qzf-z-z	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M-1}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M-1}m)\cos(\frac{(n+1)p}{N+1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(n+1)p}{N+1})$
Azf-azf-z-z	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M}(m+1)) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M}(m+1))\cos(\frac{(n+1)p}{N+1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(n+1)p}{N+1})$
z-z-zf-zf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M+1}(m+1)) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M+1}(m+1))\cos(\frac{np}{N}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{np}{N})$
zf-zf-azf-azf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M}m)\cos(\frac{(n+1)p}{N}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(n+1)p}{N})$
zf-zf-qzf-qzf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M}m)\cos(\frac{np}{N-1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{np}{N-1})$
qzf-qzf-azf-azf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{p}{M-1}m) + 4A_{1,1}\cos(\frac{p}{M-1}m)\cos(\frac{(n+1)p}{N}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(n+1)p}{N})$
z-zf-azf-qzf	$A_{0,0} + 2A_{-1,0}\cos(\frac{(2m+1)p}{2M+1}) + 4A_{1,1}\cos(\frac{(2m+1)p}{2M+1})\cos(\frac{(2n+1)p}{2N-1}) + 2A_{0,-1}\cos(\frac{(2n+1)p}{2N-1})$

Valori proprii pentru diferite tipuri de conditii de granita (2D)

CUPRINS