

## *Capitolul 2*

### **Analiza de tip *wavelet***

- 2.1 Introducere
- 2.2 Transformata *wavelet* continuă
- 2.3 Transformata *wavelet* discretă
- 2.4 Transformata *wavelet* în timp discret
- 2.5 Discuție asupra transformatei *wavelet*
- 2.6 Aplicații ale analizei de tip *wavelet*

Probabil că puține sunt subiectele specifice teoriei semnalelor care să se fi bucurat de un interes atât de mare în ultimele două decenii precum cel prezentat în cuprinsul acestui capitol. Cu excepția notabilă a semnalelor haotice (ale căror caracteristici nu pot fi separate însă de cele ale sistemelor care le-au generat), tehnicile de analiză multirezoluție, în special cele bazate pe utilizarea transformatei *wavelet*, s-au situat constant în centrul preocupărilor unor numeroase colective de cercetare, dar au pătruns cu succes și în aplicații practice dintre cele mai diverse. Este suficient să amintim în acest context apariția standardului FBI de stocare a amprentelor sau standardul de compresie JPEG2000 pentru a intui palaja largă de posibilități de utilizare a acestor instrumente de procesare. În plus, analiza semnalelor biomedicale (ECG, EEG), a celor financiare, rezolvarea ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale sau filtrarea zgomotului completează tabloul aplicativ divers și dinamic specific acestui domeniu.

Din punct de vedere teoretic analiza de tip *wavelet* poate fi considerată ca aflându-se la maturitate, odată cu apariția unui set semnificativ de cărți și lucrări de specialitate publicate în reviste de prestigiu. Din păcate, majoritatea acestor resurse bibliografice au fost elaborate de către matematicieni (și, uneori, *pentru* matematicieni), astfel încât “descifrarea” lor riguroasă se dovedește dificilă pentru specialiști în alte domenii, în particular pentru cei interesați cu precădere de implementarea algoritmilor și utilizarea lor practică. Din acest punct de vedere, vom aborda pe parcursul acestui capitol o prezentare folosind instrumente familiare teoriei semnalelor și sistemelor, făcând apel deseori la noțiuni binecunoscute de filtrare sau algebră liniară, cu scopul de a oferi o imagine cât mai clară asupra acestui subiect.

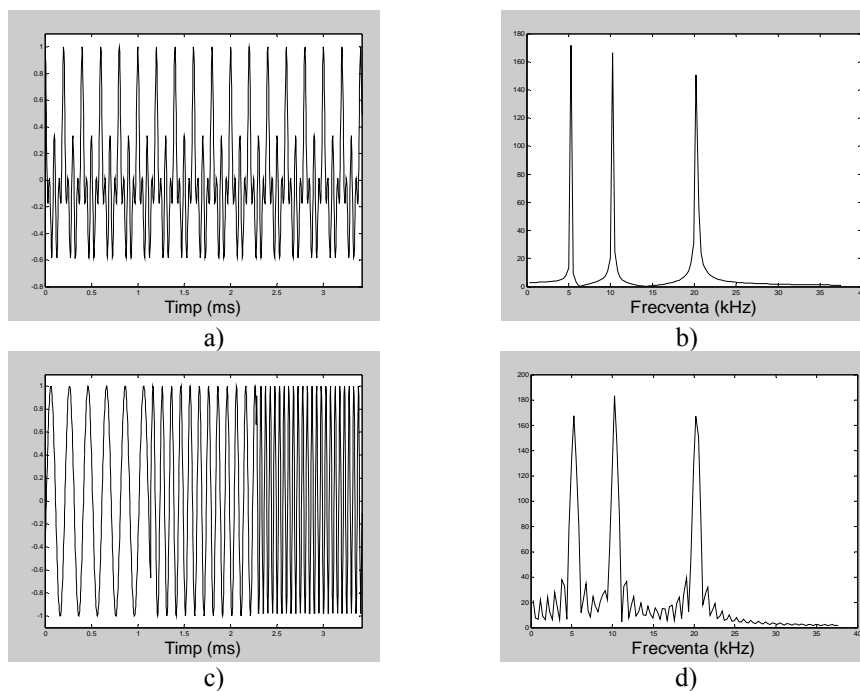
## 2.1 Introducere

Semnalele reprezintă manifestări purtătoare de informație și, ca urmare, suntem interesați de modelarea, clasificarea și caracterizarea acestora prin intermediul unor mărimi obiective. În cazul semnalelor unidimensionale caracterizarea se aplică, de regulă, în domeniul timp, pe când în cazul semnalelor bidimensionale (de exemplu, al imaginilor) se folosește domeniul spațial. Informații complementare sunt

furnizate de analiza compoziției spectrale (a informației din domeniul frecvență), realizate cu ajutorul binecunoscutei transformate Fourier. Deși reprezintă un instrument de analiză familiar, nelipsit din cărțile dedicate prelucrării semnalelor, transformata Fourier este dificil de utilizat în aplicațiile în care suntem interesați să cunoaștem compoziția spectrală a unui semnal *la un moment de timp precizat*. Astfel de situații apar frecvent în practică, de exemplu în cazul prelucrării semnalelor seismice, a seriilor de timp financiare sau a unor semnale biomedicale. Mai mult, există aplicații în care suntem interesați să aplicăm operații de filtrare care să mențină totuși în forma de undă rezultată momentele de timp la care apar modificări semnificative ale aspectului semnalului original (deoarece prezența, aspectul general și duratele unor astfel de segmente sunt purtătoare de informație), însă transformata Fourier asigură cu dificultate un asemenea obiectiv.

### **Exemplul 2.1**

Să considerăm semnalul  $f_1(t) = \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 4\omega_0 t$ , cu  $\omega_0 = 5 \text{ kHz}$ . Forma de undă în timp este indicată în Fig. 2.1a, iar spectrul corespunzător se prezintă în Fig. 2.1b. Spre deosebire de acest semnal, care are proprietatea că în *orice moment de timp* sunt prezente simultan toate cele 3 componente armonice, construim semnalul  $f_2(t)$ , reprezentat în Fig. 2.1c, prin concatenarea unor intervale de timp distincte în care apare numai câte una dintre cele 3 componente armonice care alcătuiesc semnalul  $f_1(t)$ . Spectrul semnalului  $f_2(t)$ , indicat în Fig. 2.1d, seamănă foarte mult cu cel al semnalului  $f_1(t)$ , ambele fiind caracterizate prin prezența aceluiași maxime pronunțate în dreptul frecvențelor de 5, 10, respectiv 20 kHz (lobii de amplitudine redusă prezenți în cazul spectrului semnalului  $f_2(t)$  se datorează tranziției bruște de la o frecvență la alta și sunt nerelevanți în contextul acestei discuții). Ca urmare, simpla inspecție a transformatei Fourier a celor 2 semnale nu poate face distincția clară între acestea, deși formele de undă sunt net diferite. În particular, transformata Fourier nu poate arăta care dintre componentele armonice este prezentă *la un moment dat* în structura semnalului analizat, deși acest lucru este necesar în multe situații.



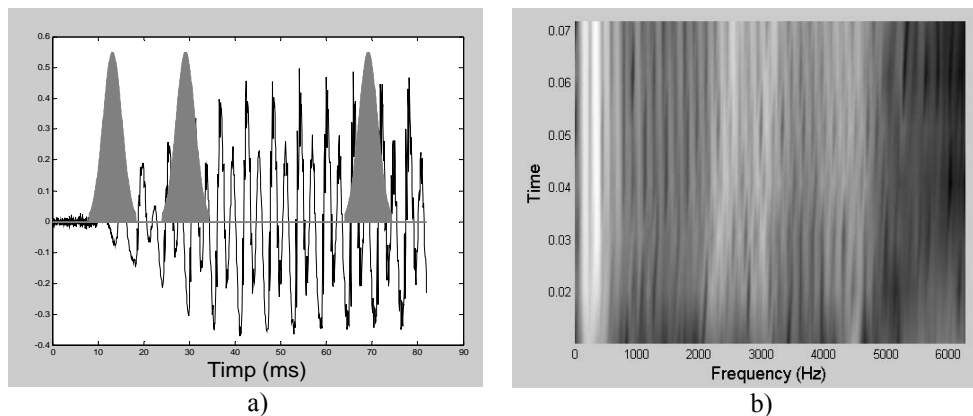
**Fig. 2.1** a) forma de undă a semnalului  $f_1(t)$ ; b) spectrul semnalului  $f_1(t)$ ;  
c) forma de undă a semnalului  $f_2(t)$ ; d) spectrul semnalului  $f_2(t)$

Una dintre posibilitățile cele mai cunoscute de a putea obține totuși informații referitoare la compoziția spectrală a unui semnal la un moment dat o reprezintă utilizarea așa-numitei **transformate Fourier pe termen scurt** (*Short Time Fourier Transform - STFT*) [14]. Această metodă presupune înmulțirea semnalului analizat cu un semnal de tip fereastră (adică având durată finită, aleasă în raport cu precizia dorită în localizarea temporală a informației spectrale) și aplicarea repetată a transformatei Fourier pe porțiuni succesive “decupate” din semnalul studiat, precum se prezintă sugestiv în Fig. 2.2. În mod concret, definițiile transformatei Fourier clasice, respectiv ale celei pe termen scurt sunt indicate în ecuațiile:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$f(t) \leftrightarrow STF(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\tau) \cdot w^*(\tau - t)] e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (2.2)$$

Rezultatul evaluării STFT se poate reprezenta sub forma unui grafic tridimensional (timp, frecvență, amplitudine) sau, mai frecvent, sub formă bidimensională, când informația de amplitudine este codată prin nivele de intensitate de culoare.

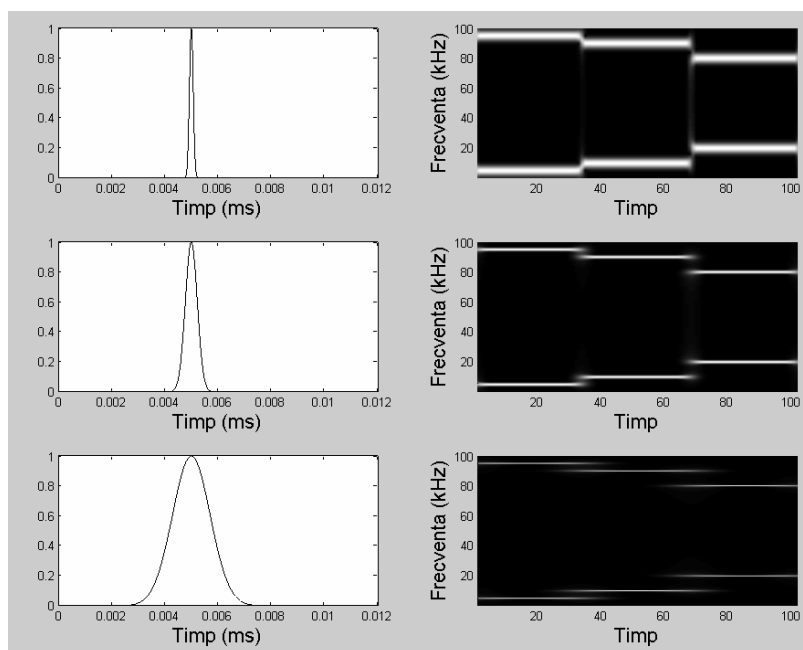


**Fig. 2.2** Exemplu de calcul al transformatei Fourier pe termen scurt:  
a) forma de undă în timp; b) spectrograma

### Exemplul 2.2

Reluăm exemplul prezentat anterior, calculând de această dată transformata Fourier pe termen scurt corespunzătoare semnalului  $f_2(t)$ . Drept semnal fereastră vom folosi un semnal gaussian descris de relația  $w(t) = e^{-\alpha t^2}$ , unde parametrul  $\alpha$  controlează lărgimea ferestrei (riguros vorbind, fereastra gaussiană nu are suport compact, altfel spus nu are durată finită, însă poate fi considerată suficient de apropiată de un astfel de semnal. Alegerea este motivată în contextul acestei discuții de absența, în cazul evaluării transformatei Fourier, a lobilor secundari specifici lucrului cu ferestre cu suport compact, astfel încât concluziile vizate prin acest exemplu să fie mai clare).

Rezultatul evaluării STFT pentru 3 valori distincte ale parametrului  $\alpha$  (anume  $\alpha = 0.01, 0.001, 0.0001$ ) se prezintă în Fig. 2.3. Prima pereche de grafice corespunde utilizării ferestrei cu durată cea mai mică și, în acest caz, graficul STFT indică o localizare temporală foarte bună a momentelor la care se produc schimbările de frecvență, însă pe de altă parte valoarea frecvenței nu poate fi indicată cu acuratețe



**Fig. 2.3** Semnale de tip fereastră de durată variabilă și STFT corespunzătoare

(altfel spus, în loc să vedem câte o linie spectrală clară pe frecvențele de 5, 10 și 20 kHz vedem în schimb câte un *interval* de frecvențe). Crescând progresiv durata ferestrei, se îmbunătățește localizarea în domeniul frecvență (ne apropiem de situația ideală în care trebuie să vedem linii spectrale clare), însă se degradează localizarea temporală (nu mai putem identifica cu precizie momentele la care apar modificări în forma de undă originală). În ultimul caz ne aflăm în situația în care lărgimea ferestrei este maximă, astfel încât liniile spectrale se văd foarte clar, dar momentele care delimitează intervalele de interes sunt practic “invizibile”.

Exemplul descris anterior ilustrează foarte clar compromisul referitor la **rezoluția** utilizată în caracterizarea oricărui semnal în domeniile timp și frecvență: precizarea cu acuratețe a duratei în timp a unui semnal se face cu prețul pierderii preciziei în aprecierea informației spectrale a acestuia și viceversa. Motivația teoretică riguroasă a acestei comportări se regăsește în așa-numitul **principiu de incertitudine** stabilit de către Heisenberg, care în esență afirmă că *produsul dintre duratele în timp și frecvență ale unui semnal este limitat inferior de o valoare*

nenulă. Astfel, să considerăm un semnal  $f(t)$  având transformata Fourier  $F(\omega)$ . Definim durata în timp a semnalului  $d_t$ , respectiv durata în frecvență  $D_f$ , astfel [14]:

$$d_t^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt ; \quad D_f^2 = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.3)$$

unde mărimea  $E$  reprezintă energia semnalului:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

O primă formulare a principiului de incertitudine afirmă că dacă semnalul  $f(t)$  are proprietatea  $\sqrt{t} f(t) \rightarrow 0$  pentru  $|t| \rightarrow \infty$ , atunci  $d_t \cdot D_f \geq \frac{1}{2}$ . O altă formulare, mai utilă în contextul teoriei semnalelor, arată că în cazul unui semnal de durată finită în timp, cu  $f(t) = 0$  pentru  $|t| > \tau$ , este valabilă relația  $\tau \cdot D_f \geq \frac{\pi}{2}$ . Putem obține o imagine intuitivă a celor enunțate revenind la analiza de tip STFT descrisă anterior și imaginându-ne o împărțire a planului timp-frecvență în celule individuale a căror “etichetă” este stabilită de poziția ferestrei de analiză la un moment dat și a căror arie este dată de produsul dintre durata în timp și cea în frecvență a porțiunii “decupate” din semnalului considerat, ca în Fig.2.4. Principiul de incertitudine afirmă faptul că aria celulelor individuale nu poate scădea sub o valoare de prag minimă (deși ideal am dori ca o astfel de celulă să se reducă la un simplu punct), în condițiile în care dimensiunea concretă a acestora depinde în mod nemijlocit de tipul semnalului fereastră adoptat. Aici intervine și o primă diferență majoră între analiza de tip Fourier (pe termen scurt) și cea de tip *wavelet*, ce urmează a fi prezentată pe parcursul acestui capitol: în vreme ce în cazul Fourier fereastra de analiză are **durată fixă**, indiferent de frecvența semnalului studiat, în cazul *wavelet* vom vedea că se adoptă ferestre de **durate variabile**, dependente de banda de frecvență avută în vedere și anume: la frecvențe înalte se folosesc ferestre de analiză de durată scurtă, pe când la frecvențe joase apar ferestre de durată lungă. Efectul acestei abordări este următorul: vom obține o localizare precisă a momentelor de timp când sunt prezente componente de frecvență ridicată în semnalul studiat (în detrimentul acurateții în precizarea valorii exacte a acestor

frecvențe), respectiv vom putea ști cu mai mare exactitate valoarea componentelor de frecvență joasă existente în semnal, fără a localiza însă strict și momentele când acestea apar. O astfel de strategie este pe deplin justificată în multe aplicații practice în care, de regulă, întâlnim componente de frecvență coborâtă care se extind mult în timp, peste care se suprapun din când în când, pentru intervale scurte, semnale rapid variabile, eventual și cu amplitudine mult sporită.

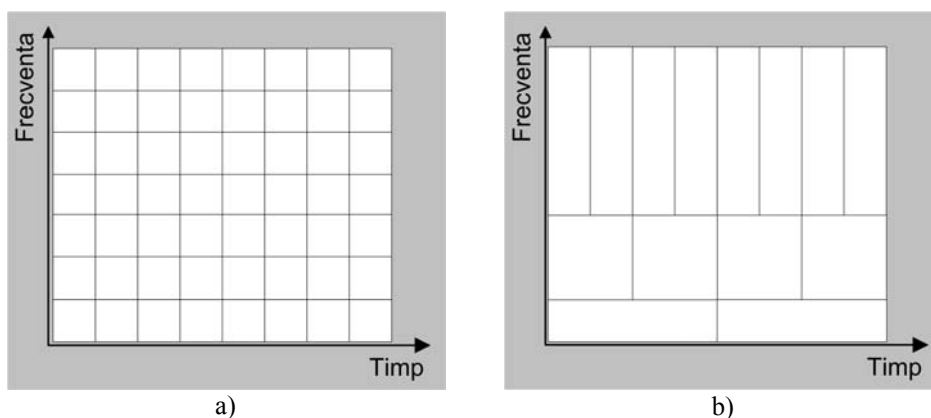


Fig. 2.4 Împărțirea planului timp-frecvență în cazul: a) STFT; b) analizei *wavelet*

### Exemplul 2.3

Vom analiza efectul utilizării unor ferestre de analiză de durată variabilă în contextul evaluării STFT în cazul unui semnal care conține o combinație de componente caracterizate de o bună localizare temporală, respectiv spectrală. Semnalul considerat este generat ca suma dintre un semnal armonic pe frecvența de 25 Hz, un semnal de tip *chirp liniar*<sup>1</sup> (semnal MF a cărui semnal modulator variază liniar) care pornește de la frecvența 0 și ajunge la 150 Hz după 1 secundă, respectiv un impuls triunghiular îngust, care apare după 1 s și durează 10 ms. Forma de undă și spectrul corespunzător sunt indicate în Fig. 2.5a,b. Calculăm în continuare STFT corespunzătoare acestui semnal folosind o fereastră Hamming de durată 32, 64, 128, respectiv 256 ms, iar graficele obținute sunt prezentate în Fig. 2.5c-f. Se observă cu ușurință efectul discutat anterior: utilizarea unei ferestre de analiză de

<sup>1</sup> Există și alte tipuri de semnale *chirp*, de exemplu chirp parabolic (pătratic).



durată lungă favorizează identificarea cu precizie a frecvenței componente armonice (rezoluție bună în frecvență), în schimb momentul apariției impulsului este foarte neclar. Pe de altă parte, o fereastră de durată scurtă permite localizarea momentului de timp când apare impulsul, în schimb componenta spectrală corespunzătoare semnalului armonic este greu de precizat. Folosirea unei durate medii a ferestrei permite obținerea unui compromis rezonabil în privința rezoluției timp-frecvență, după cum se observă în Fig. 2.5d.

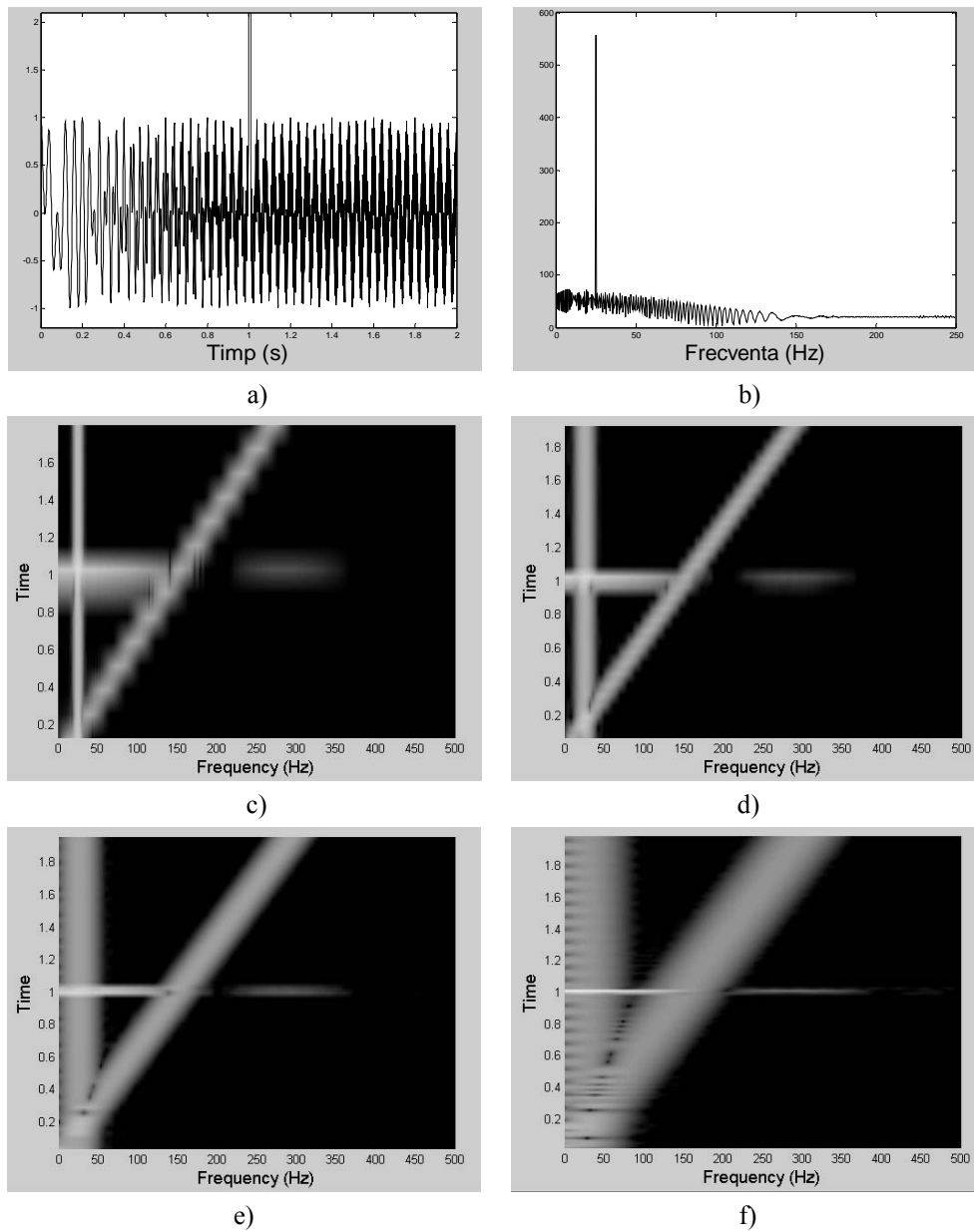
## 2.2 Transformata *wavelet* continuă

Analiza prezentată în paragraful anterior sugerează utilitatea unor instrumente de analiză capabile să ofere simultan o bună rezoluție atât în domeniul timp (pentru a putea identifica cu precizie momentele la care apar eventuale impulsuri de scurtă durată), cât și în frecvență (pentru a preciza cu acuratețe compoziția spectrală a semnalului, mai ales în condițiile prezenței unor componente armonice de durată mare). Din acest punct de vedere s-a arătat că analiza Fourier pe termen scurt are o utilitate redusă, asigurând cu dificultate un compromis acceptabil în privința rezoluției timp-frecvență. Exemplele prezentate indicau și o posibilă soluție: înlocuirea unei ferestre de analiză cu durată fixă, indiferent de frecvența semnalului studiat, cu un ansamblu de ferestre de analiză de durată variabilă, așa încât la frecvențe joase să folosim durate mari, iar la frecvențe ridicate să folosim durate mici. În cele ce urmează vom ilustra posibilitatea de a implementa acest principiu, prin intermediul așa-numitei **Transformate Wavelet Continue** (CWT) [3]. Astfel, să considerăm un semnal real sau complex care satisface următoarele două condiții:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$
(2.5)

Prima proprietate, conform căreia semnalul are valoare medie nulă, sugerează un posibil aspect oscilant, pe când cea de a doua proprietate, referitoare la valoarea finită a energiei, indică faptul că semnalul are concentrată cea mai mare parte a energiei într-un interval finit de timp.



**Fig. 2.5** Analiza STFT folosind ferestre de lungime variabilă:

- a) semnalul analizat; b) spectrul corespunzător;
- c) spectrograma pentru fereastra Hamming de durată 256 ms;
- d) spectrograma pentru fereastra Hamming de durată 128 ms;
- e) spectrograma pentru fereastra Hamming de durată 64 ms;
- f) spectrograma pentru fereastra Hamming de durată 32 ms

Cele 2 condiții, împreună cu o așa-numită *condiție de admisibilitate* ce va fi introdusă ulterior (necesară pentru putea defini transformata *wavelet* inversă) sunt suficiente pentru ca un semnal să se “califice” drept un semnal de tip *wavelet*. Este important de subliniat că în literatură au fost propuse numeroase astfel de semnale, unele dintre ele cu durată finită (având deci suport compact), iar altele cu durată infinită, dar cu energia concentrată într-un interval de timp finit. În Fig. 2.6 se prezintă exemple de semnale de tip *wavelet*.

Să considerăm acum un semnal  $f(t)$  cu energie finită. Definiția **Transformatei Wavelet Continue** (CWT) asociate acestui semnal este [3]:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad (2.6)$$

unde  $a$  și  $b$  sunt constante reale, iar simbolul  $*$  desemnează operația de conjugare complexă. Introducând notația:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad (2.7)$$

definiția CWT se poate rescrie sub forma:

$$W(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (2.8)$$

Ca urmare, este ușor de observat că definiția CWT presupune calculul *produsului scalar*<sup>1</sup> dintre semnalul analizat și semnalele  $\psi_{a,b}(t)$ . Factorul de normalizare  $1/\sqrt{|a|}$  asigură păstrarea energiei semnalelor  $\psi_{a,b}(t)$  indiferent de valorile particulare ale parametrilor  $a$  și  $b$ :

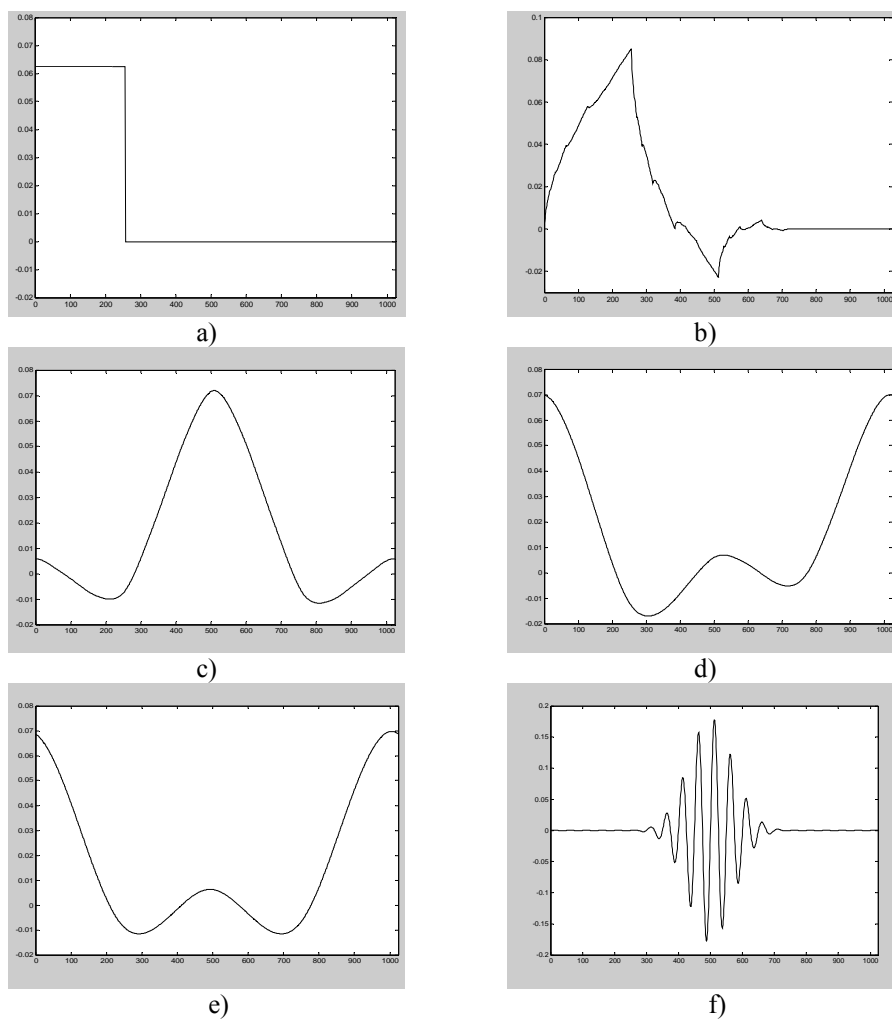
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt \quad (2.9)$$

---

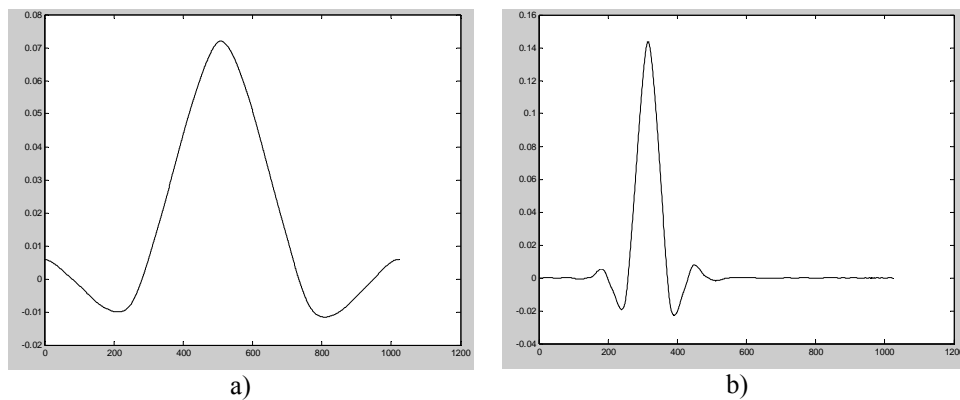
<sup>1</sup> Semnalele analogice având energie finită formează un spațiu vectorial liniar, desemnat generic  $L_2$ . În acest spațiu produsul scalar se definește:  $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$ .

Semnalele cu putere medie finită formează și ele un spațiu vectorial liniar, notat  $\tilde{L}_2$ .

Interpretarea intuitivă a semnalelor  $\psi_{a,b}(t)$  este imediată: aceste semnale reprezintă versiuni translate și scalate (dilate sau comprimate de-a lungul axei timpului) ale semnalului prototip  $\psi(t)$ , de unde și denumirea sugestivă a celui din urmă: *mother wavelet*. Scalarea se poate face prin dilatare (când  $a > 1$ ) sau comprimare (pentru  $a < 1$ ), după cum se exemplifică în Fig. 2.7.



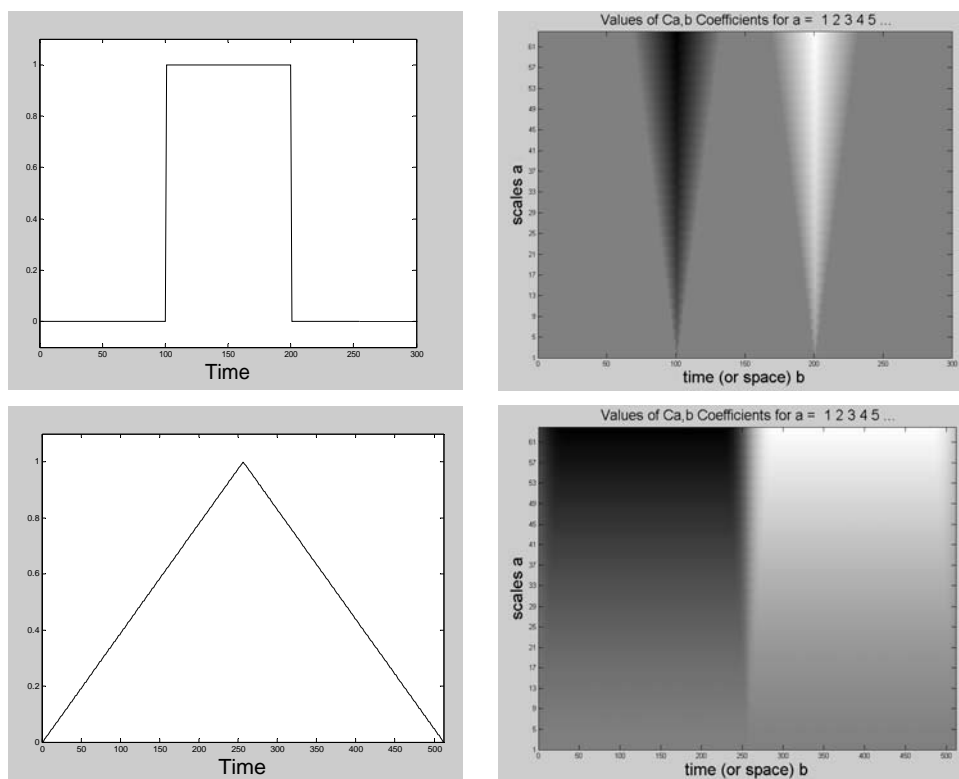
**Fig. 2.6** Exemple de semnale de tip *wavelet*:  
a) Haar; b) Daubechies; c) Coiflet; d) Symmlet; e) Battle-Lemarie; f) Morlet



**Fig. 2.7** Versiuni scalate de-a lungul axei timpului ale semnalului *wavelet* de tip Coiflet: a) dilatare; b) comprimare

Există câteva aspecte care diferențiază clar transformatele *wavelet* și Fourier:

- în ambele situații evaluarea transformatei presupune calculul unui produs scalar dintre semnalul analizat și un set de semnale care formează o bază particulară în spațiul vectorial al semnalelor de energie finită. Dacă în cazul Fourier baza este formată întotdeauna din același tip de semnale (exponențiale complexe, mai bine zis semnale armonice de tip sinus și cosinus), în cazul *wavelet* avem la dispoziție o paletă largă de forme de undă, în particular existând și posibilitatea de a construi o bază optimă în raport cu semnalul particular analizat (în literatură a fost introdus conceptul *best basis selection* [2], care are în vedere criterii de optimalitate specifice teoriei transmisiunii informației).
- baza în raport cu care se face reprezentarea de tip Fourier este ortogonală, pe când în cazul *wavelet* există posibilitatea de a utiliza și baze formate din vectori liniar independenți care nu sunt ortogonali (un caz particular îl reprezintă bazele bi-ortogonale [3, 17], formate din 2 grupe de vectori pentru care condiția de ortogonalitate este îndeplinită numai în cadrul grupului respectiv).
- spre deosebire de transformata Fourier, care depinde numai de un singur parametru, transformata de tip *wavelet* depinde de 2 parametri, a și b. Ca urmare, inclusiv modalitatea de reprezentare grafică a spectrului este diferită (și, din păcate, mai puțin intuitivă în cazul CWT). Exemple în acest sens sunt ilustrate în Fig. 2.8.



**Fig. 2.8** Reprezentare grafică a transformatei CWT corespunzătoare unor semnale elementare

Există câteva posibilități distincte de a interpreta transformata *wavelet* și anume:

a) pornind de la definiția produsului scalar al semnalelor de energie finită rezultă imediat că evaluarea CWT presupune calculul unui set de astfel de produse scalare între semnalul analizat și colecția de semnale  $\psi_{a,b}(t)$ :

$$W(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (2.10)$$

Definiția produsului scalar permite și introducerea noțiunii de *funcție de intercorelație* dintre 2 semnale, care exprimă intuitiv gradul lor de asemănare:

$$R_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \langle x(t), y(t-\tau) \rangle \quad (2.11)$$

în care  $\tau$  desemnează valoarea întârzierii care separă semnalele considerate.

Pornind de la această definiție calculul CWT poate fi rescris sub forma:

$$W(a,b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \langle f(t), \psi_{a,0}(t-b) \rangle = R_{f,\psi_{a,0}}(b) \quad (2.12)$$

Interpretarea este imediată: transformata CWT reprezintă de fapt rezultatul evaluării repetate a intercorelației dintre semnalul considerat și versiunile translate ale unui ansamblu de semnale de tip *wavelet* afectate de diverse grade de dilatare sau contracție. Mai mult, devine posibilă identificarea valorilor particulare ale parametrilor  $a$  și  $b$  pentru care se obține un semnal  $\psi_{a,b}(t)$  puternic corelat cu cel analizat trasând graficul funcției  $|W(a,b)|^2$  (graficul este denumit *scalogramă*) și identificând valorile maxime. În particular, astfel de valori extreme pot indica cu precizie intervalul de timp în care apar în semnalul analizat impulsuri de durată scurtă sau eventuale salturi bruște.

b) pornind de la definiția produsului de convoluție a 2 semnale analogice:

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (2.13)$$

definiția CWT se poate rescrie sub forma:

$$W(a,b) = f(b) * \psi_{a,0}^*(-b) \quad (2.14)$$

altfel spus, pentru o valoare dată a parametrului de scalare  $a$ , mărimea  $W(a,b)$  reprezintă ieșirea unui filtru având funcția pondere  $\psi_{a,0}^*(t)$  și semnalul de intrare  $f(b)$ . Deși deocamdată nu avem un argument justificativ, menționăm totuși că așa-numita proprietate de admisibilitate invocată anterior (și care, după cum vom vedea, permite generarea transformatei CWT inverse) impune ca filtrul să aibă o caracteristică de tip trece-bandă. Dacă notăm cu  $\Psi(\omega)$  transformata Fourier a semnalului de tip *mother wavelet*  $\psi(t)$ , atunci o proprietate binecunoscută a acesteia se formulează astfel:

$$\psi(t) \leftrightarrow \Psi(\omega) \Rightarrow \psi(t/a) \leftrightarrow |a| \Psi(a\omega) \quad (2.15)$$

Ca urmare, atât frecvența centrală cât și cele care delimitează banda de trecere la 3 dB a răspunsului în frecvență corespunzător semnalului  $\psi_{a,0}(t) = \psi(t/a)$  vor fi scalate cu același factor  $1/|a|$  față de parametrii similari asociați semnalului *mother wavelet*  $\psi(t)$ . Pe de altă parte, raportul dintre frecvența centrală și lărgimea benzii la 3 dB a unui filtru trece-bandă definește **factorul de calitate**  $Q$  al acestuia, astfel

încât ajungem la concluzia că evaluarea CWT presupune aplicarea semnalului analizat la intrarea unui continuum de filtre (indexat de parametrul  $a$ ) având factorul  $Q$  constant.

În final, să ne concentrăm și asupra posibilității de a reface un semnal pornind de la transformata CWT asociată acestuia, adică de la valorile  $W(a,b)$ . Prin analogie cu transformata Fourier, pentru care formele directă și inversă sunt principial asemănătoare, ar fi interesant de identificat condițiile în care transformata *wavelet* inversă presupune de asemenea folosirea unui set de versiuni translate și scalate ale unei forme de undă generice, de tip *mother wavelet*. O astfel de posibilitate există și ea presupune îndeplinirea **condiției de admisibilitate** invocată de mai multe ori pe parcursul acestui capitol, exprimată prin relația [3, 17]:

$$0 < C < \infty, \text{ unde } C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (2.16)$$

unde  $\Psi(\omega)$  reprezintă transformata Fourier a semnalului de tip *mother wavelet*  $\psi(t)$ . Este important de subliniat că aceasta este o condiție suficientă, nu și necesară<sup>1</sup>, iar atunci când este îndeplinită, semnalul a cărui transformată CWT este dată de valorile  $W(a,b)$  se calculează astfel:

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{a=-\infty}^{\infty} \int_{b=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|^2} W(a,b) \psi_{a,b}(t) da db \quad (2.17)$$

Relația (2.16) conduce imediat la concluzia că transformata Fourier  $\Psi(\omega)$  trebuie să aibă valoare medie nulă  $|\Psi(\omega)|^2_{\omega=0} = 0$ , astfel încât se justifică afirmația anterioară potrivit căreia un filtru a cărui funcție pondere este dată de o versiune scalată a semnalului de tip *mother wavelet* are caracter trece-bandă.

---

<sup>1</sup> Pentru cazul în care setul de parametri  $(a,b)$  este discretizat, așa după cum vom vedea în paragraful următor, au fost demonstrate condiții necesare și suficiente de reconstrucție.



### 2.3 Transformata wavelet discretă

Există câteva elemente care fac dificilă utilizarea practică a transformatei *wavelet* continue. Un prim aspect se referă la gradul ridicat de redundanță al setului de valori  $W(a,b)$ : după cum s-a arătat anterior, evaluarea acestora presupune calculul intercorelației dintre semnalul analizat și un continuum de versiuni translate și scalate ale unei aceleiași funcții. Cum aceste versiuni nu sunt ortogonale (altfel spus, astfel de versiuni afectate de translații mici vor fi încă suficient de asemănătoare), devine evident că vor apare subseturi de coeficienți  $W(a,b)$  foarte apropiați ca valoare, situație care este ineficientă în practică. Al doilea motiv îl reprezintă faptul că definiția (2.8) presupune folosirea unui număr infinit de valori ale parametrilor  $a$  și  $b$ , deși am prefera să lucrăm numai cu un număr limitat al acestora. În sfârșit, un dezavantaj major îl reprezintă inexistența unor soluții analitice capabile să furnizeze expresia transformatei CWT pentru semnale oarecare, astfel încât suntem nevoiți, exact ca în cazul transformatei Fourier, să facem apel la metode numerice de calcul. Din acest punct de vedere, vom fi interesați de elaborarea unor algoritmi rapizi, așa cum în cazul transformatei Fourier avem la dispoziție varianta FFT. În cele ce urmează vom analiza pe rând posibilitățile de a elimina aceste neajunsuri.

#### A. Eliminarea redundanței în reprezentarea de tip wavelet

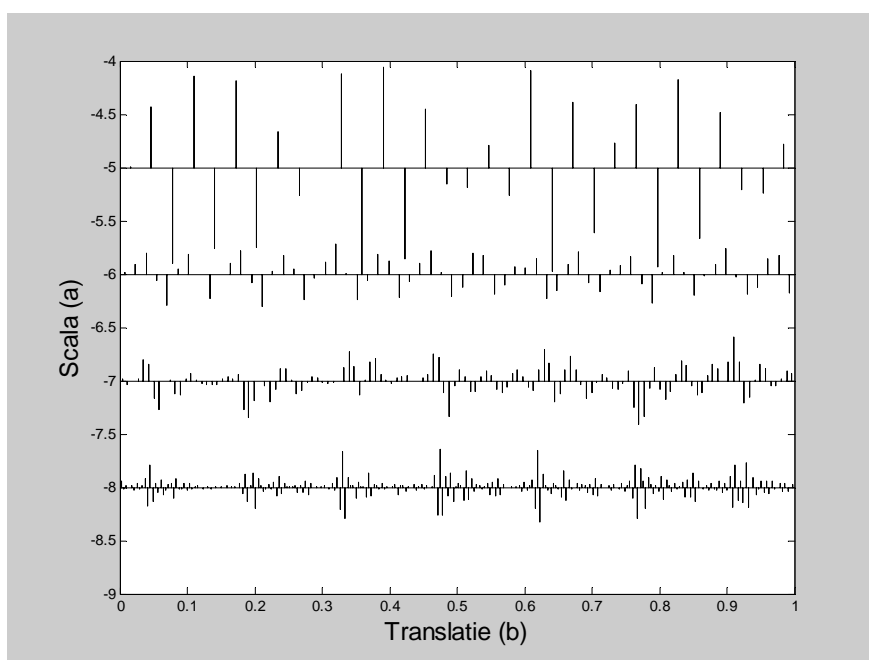
Soluția avută în vedere se referă la *discretizarea* valorilor parametrilor  $a$  și  $b$  pentru care se efectuează calculul CWT, folosindu-se o reprezentare de forma [17]:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} d[k,l] 2^{-k/2} \psi(2^{-k}t - l) \quad (2.18)$$

Setul de coeficienți  $d(k,l)$  definește așa-numita **Transformată Wavelet Discretă** (DWT). Este important de observat faptul că discretizarea afectează numai parametrii  $a$  și  $b$ , semnalele  $f(t)$  și  $\psi(t)$  rămânând semnale analogice! Intuitiv, acest tip de descompunere seamănă cu seria Fourier asociată unui semnal periodic, în care apar numai componente ale căror frecvențe sunt multipli întregi ai frecvenței fundamentale, ca urmare o denumire mai potrivită pentru relația (2.18) ar fi fost cea de descompunere în *serie wavelet*. Acest tip particular de discretizare, bazat pe

un raport egal cu 2 între valorile succesive ale parametrilor  $a$  și  $b$  poartă denumirea de **eșantionare diadică** și este reprezentat sugestiv în Fig. 2.9. Se observă că scalarea se produce prin factori de forma  $a = 2^k$ , iar translația prin valori  $b = 2^{-k}$ , cu  $l$  număr întreg (ca urmare, pasul cu care se efectuează translația nu este fix, ci depine nemijlocit de scala pe care ne aflăm la un moment dat!). Este important de subliniat totuși faptul că eșantionarea diadică ar putea “rata” informații relevante despre semnalul analizat (de exemplu, valorile extreme ale acestuia), astfel încât în literatură au fost propuse și alte variante de eșantionare [7], care nu respectă numai de cânt o anumită regularitate în explorarea spațiului timp-frecvență. Eliminarea efectivă a redundanței se produce prin alegerea unui set *ortogonal* de funcții  $\psi_{a,b}(t)$ , care respectă condiția:

$$\langle \psi_{a,b}(t), \psi_{c,d}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}(t) \psi_{c,d}^*(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{pentru } a=b \text{ și } c=d \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad (2.19)$$



**Fig. 2.9** Eșantionarea diadică a setului de parametri  $a$  și  $b$

Două observații merită făcute în acest context: a) ortogonalitatea nu este o condiție necesară în reprezentarea semnalelor, însă este eficientă din punct de vedere practic; b) discretizarea parametrilor  $a$  și  $b$  implică caracterul *variabil în timp* al reprezentării: dacă avem la dispoziție 2 semnale identice, care diferă numai printr-o întârziere relativă, reprezentările lor bazate pe relația (2.18) nu vor fi identice (și afectate de aceeași întârziere), ci vor fi diferite!

#### B. Limitarea setului de valori $(a,b)$

Odată rezolvată problema eliminării redundanței în reprezentarea de tip *wavelet*, ne propunem să identificăm modalitatea prin care putem renunța la evaluarea acestuia într-un număr infinit de perechi de valori  $(a,b)$ . Dacă în cazul translației, indexate în pași discreți de parametrul  $b$ , este evident că durata semnalului impune o limită superioară, lucrurile sunt mai dificile în cazul parametrului  $a$  care indexează scala. Să ne reamintim una dintre interpretările transformatei CWT precizate anterior: calculul presupune de fapt aplicarea semnalului analizat la intrarea unui ansamblu (banc) de filtre de tip trece-bandă, cu factor de calitate constant, ale căror frecvențe centrale (și benzi de trecere la 3 dB) se vor dubla la fiecare dublare a valorii parametrului  $a$ . Ca urmare, ne putem imagina ușor spectrul semnalului studiat “acoperit” de o serie de benzi de trecere ale acestor filtre, precum se sugerează în Fig. 2.10. Deoarece filtrele nu sunt ideale, acoperirea uniformă presupune o anumită suprapunere parțială a benzilor corespunzătoare filtrelor adiacente. Notând frecvența maximă din spectrul semnalului analizat cu  $\Omega_{\max}$ , filtrele utilizate vor avea (în ordine descrescătoare a frecvenței) benzi de trecere de forma  $[0.5 \Omega_{\max}, \Omega_{\max}]$ ,  $[0.25 \Omega_{\max}, 0.5 \Omega_{\max}]$ ,  $[0.125 \Omega_{\max}, 0.25 \Omega_{\max}]$ , ... Pentru că intenția noastră este totuși de a folosi un număr finit de valori ale parametrului  $a$  care indexează scala (și care fixează numărul de filtre trece-bandă utilizat) una dintre cele mai naturale idei este de a realiza “acoperirea” spectrului semnalului analizat printr-o combinație dintre un număr oarecare de filtre trece-bandă și un *filtru trece-jos*. Acest filtru trece-jos este asociat unei așa-numite **funcții de scalare**, care va depinde în mod nemijlocit de clasa de semnale de tip *wavelet* aleasă pentru reprezentarea descrisă prin relația (2.18).

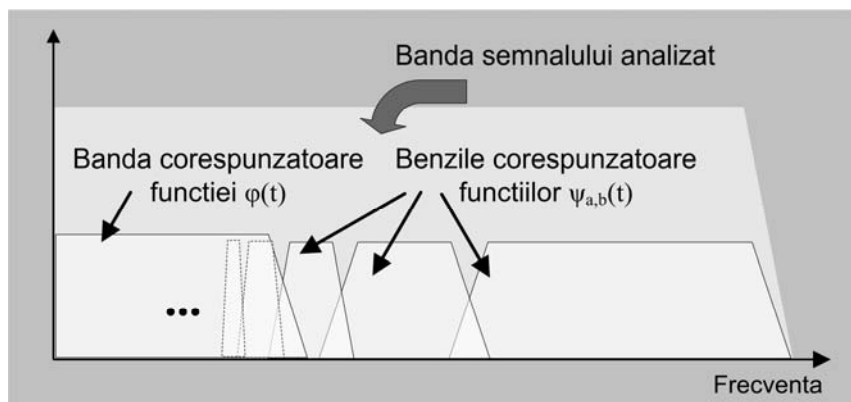


Fig. 2.10 Acoperirea benzii ocupate de spectrul semnalului studiat

Funcția de scalare trebuie să îndeplinească următoarele constrângeri [17]:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \\
 b) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1 \\
 c) \quad & \langle \phi(t), \phi(t-n) \rangle = \delta(n)
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

La acestea se adaugă o proprietate fundamentală exprimată printr-o așa-numită **ecuație de dilatație** (în fapt, un tip special de ecuație cu diferențe în care intervin 2 scale distincte ale axei temporale) [3, 18]:

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] \phi(2t-n)
 \tag{2.21}$$

unde  $c(n)$  sunt coeficienți reali și, de regulă, numărul acestora este finit. Înlocuind în această relație parametrul  $t$  prin  $2^{-k}t$ , se poate scrie:

$$\phi(2^{-k}t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] \phi(2^{-(k-1)}t-n)
 \tag{2.22}$$

Interpretarea relației anterioare este imediată: funcția de scalare corespunzătoare unei anumite scale de reprezentare poate fi exprimată în raport cu valorile aceleiași funcții la o scală imediat inferioară (și care conține mai multă informație). Se poate arăta că setul de coeficienți  $c(n)$  este supus următoarelor constrângeri [17]:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n] = 2 \\
 b) \quad & \langle \phi(t), \phi(t-l) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c[m]c[m-2l] = \delta[l], \quad l \in Z
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Setul de coeficienți  $c(n)$  poate fi interpretat foarte comod drept funcția pondere a unui filtru discret, iar dacă notăm cu  $C(\omega)$  răspunsul în frecvență al acestuia, se poate arăta că este îndeplinită condiția:

$$|C(\omega)|^2 + |C(\omega + \pi)|^2 = 4 \tag{2.24}$$

Legătura nemijlocită dintre funcția de scalare și semnalele de tip *wavelet* rezultă din impunerea următoarei condiții de ortogonalitate, care se adaugă celor descrise prin relațiile (2.5) și (2.19):

$$\langle \psi(t), \phi(t-n) \rangle = 0, \quad n \in Z \tag{2.25}$$

Există posibilitatea de a formula o ecuație de dilatație care implică semnalul de tip *wavelet*  $\psi(t)$  într-o manieră asemănătoare ecuației (2.21) [17]:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]\phi(2t-n) \tag{2.26}$$

unde setul de coeficienți  $d(n)$  poate fi de asemenea interpretat comod ca reprezentând funcția pondere a unui filtru discret cu răspunsul în frecvență  $D(\omega)$ , fiind supus unei serii de constrângeri de forma:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n] = 0 \\
 b) \quad & \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d[m]d[m-2l] = \delta[l], \quad l \in Z \\
 c) \quad & |D(\omega)|^2 + |D(\omega + \pi)|^2 = 4
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Legătura nemijlocită dintre semnalele  $\phi(t)$  și  $\psi(t)$  se deduce din ansamblul relațiilor anterioare sub forma:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \langle \psi(t), \phi(t-l) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d[m]c[m-2l] = 0 \\
b) \quad & |C(\omega)|^2 + |D(\omega)|^2 = 4 \\
c) \quad & C^*(\omega)C(\omega+\pi) + D^*(\omega)D(\omega+\pi) = 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Particularizarea relației (2.26) pentru  $t$  de forma  $2^{-k}t$  conduce la:

$$\psi(2^{-k}t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d[n]\phi(2^{-(k-1)}t - n) \tag{2.29}$$

Pe de altă parte, formula (2.18) sugerează posibilitatea de a exprima un semnal de interes sub forma unei combinații liniare de versiuni translate și scalate ale semnalului *wavelet*  $\psi(t)$ , astfel încât în baza relației (2.29) ajungem imediat la concluzia că același semnal se poate reprezenta și folosind versiuni scalate și translate ale funcției de scalare  $\phi(t)$ .

### C. Implementarea unui algoritm de calcul al Transformatei Wavelet Discrete

Modalitatea intuitivă de analiză a unui semnal prin aplicarea sa la intrarea unui ansamblu de filtre având frecvențe centrale și lărgimi de bandă adecvate este tipică pentru un algoritm de procesare denumit *subband coding*, ilustrat generic în Fig. 2.11 [19, 20]. Semnalul original este prelucrat mai întâi printr-o pereche de filtre de tip trece-jos și trece-sus. Ieșirea filtrului trece-jos este la rândul său procesată din nou cu o pereche de filtre de aceeași natură, cu observația că frecvențele de tăiere ale acestora sunt înjumătățite față de prima pereche. Mecanismul este continuat apoi pentru un număr oarecare de pași. În principiu, există posibilitatea ca benzile filtrelor să fie alese independent, în acord cu tipul și localizarea informației considerate de interes. În acest caz însă efortul de calcul crește semnificativ, pentru că proiectarea trebuie făcută separat, pentru fiecare filtru în parte. Ca alternativă, avem posibilitatea să utilizăm un singur tip de filtru (în realitate, 2 filtre, unul trece-bandă și altul trece-jos), dar să impunem restricția ca benzile și frecvențele centrale ale acestora să fie interdependente. Exact acesta este principiul sugerat de discuția anterioară referitoare la analiza de tip *wavelet*, în care două filtre (trece-bandă) consecutive au benzile de trecere în raportul 2:1! Pentru a ajunge la relațiile care permit determinarea coeficienților care apar în reprezentarea unui semnal în raport

cu bazele de tip *wavelet* (în realitate, în raport cu semnale de tip *wavelet* și, respectiv, funcția de scalare) să remarcăm mai întâi faptul că relația (2.23b) implică ortogonalitatea funcțiilor care formează setul  $\{\phi(t-l), l \in \mathbb{Z}\}$ . Particularizând această observație pentru momente de timp de forma  $2^{-k}t$ , ajungem la concluzia că și semnalele  $\{\phi(2^{-k}t-l), l \in \mathbb{Z}\}$  sunt ortogonale (și, implicit, liniar independente) pentru o valoare dată a parametrului de scală  $k$ .

În consecință, notând prin  $V_k$  spațiul vectorial liniar generat de către baza formată din acest set de vectori, rezultă că un semnal aparținând spațiului  $V_k$  se poate reprezenta sub forma:

$$f_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[k, n] \phi(2^{-k}t - n) \quad (2.30)$$

Mai mult, în baza relației (2.22) ajungem la concluzia importantă că  $V_k \subset V_{k-1}$ , cu alte cuvinte orice semnal din spațiul  $V_k$  corespunzător unui parametru de scală de forma  $2^{-k}$  aparține și subspațiului descris de factorul de scală  $2^{-(k-1)}$ !

Una dintre relațiile fundamentale specifice analizei de tip *wavelet* (prezentată aici fără demonstrație) stabilește legătura dintre setul de coeficienți  $a[k, n]$  specifici scalei  $k$  și setul corespunzător unei scale imediat inferioare ( $k-1$ ) prin relația [17]:

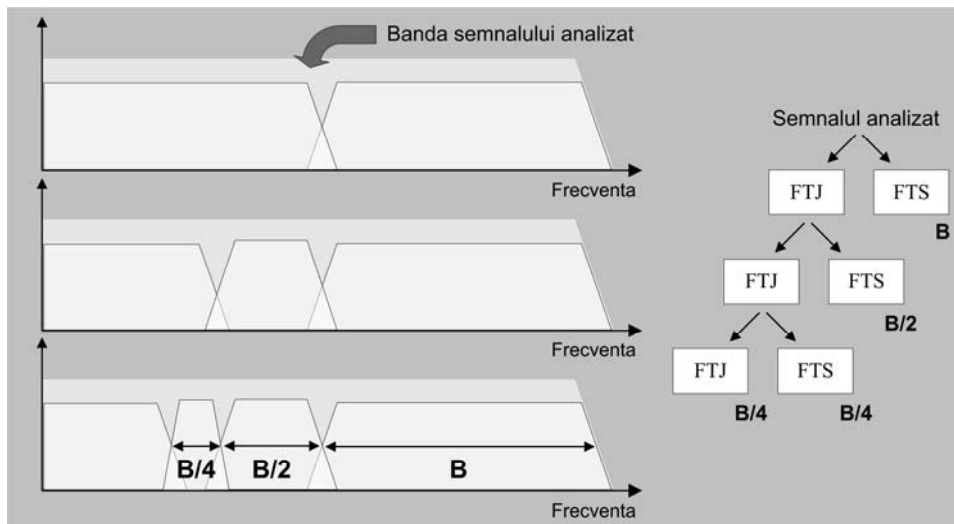


Fig. 2.11 Principiul metodei *subband coding*

$$a[k, n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-1, m] \frac{c[m-2n]}{2} \quad (2.31)$$

în care coeficienții  $c[n]$  sunt cei care intervin în relația (2.21).

În continuare, să observăm că reprezentarea unei funcții aparținând spațiului vectorial  $V_{k-1}$  se poate realiza în două moduri: pe de o parte am putea scrie o relație de tipul celei indicate în ecuația (2.30), iar pe de altă parte am putea specula relațiile (2.29) și (2.31) pentru a ajunge la concluzia că același semnal se poate scrie și sub forma unei combinații liniare a unor versiuni scalate (cu valoarea  $2^{-k}$ ) și translate ale semnalelor  $\phi(t)$  și  $\psi(t)$ . Ca urmare, se poate scrie:

$$\begin{aligned} f_{k-1}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[k-1, n] \phi(2^{-(k-1)}t - n) \\ f_{k-1}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[k, n] \phi(2^{-k}t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[k, n] \psi(2^{-k}t - n) \end{aligned} \quad (2.32)$$

#### Observații:

a) Ultima relație este în acord cu punctul de vedere exprimat în Fig. 2.10 potrivit căruia semnalul studiat este aplicat progresiv la intrarea unui număr *finit* de filtre trece-bandă cu factor de calitate constant, la care se adaugă un filtru trece-jos: întotdeauna vom putea înlocui un astfel de filtru trece-jos prin combinația dintre un filtru trece-bandă suplimentar și un alt filtru trece-jos având banda de frecvență înjumătățită față de cea a filtrului trece-jos de la care am pornit.

b) Expresia  $f_k(t)$  din relația (2.30) poate fi interpretată ca oferind o *aproximație* a semnalului original  $f(t)$  din ecuația (2.18). În fapt, la limită vom avea  $f_{-\infty}(t) = f(t)$ . Concluzia importantă stabilită anterior potrivit căreia  $V_k \subset V_{k-1}$  permite și o altă observație intuitivă: trecerea de la o scală de reprezentare la una imediat inferioară *menține pe de o parte întreaga informație existentă anterior și, pe de altă parte, aduce un surplus de informație de detaliu.*



Se poate arăta că este valabilă și în cazul setului de coeficienți  $b[k,n]$  o relație de recurență principal asemănătoare relației (2.31) și anume:

$$b[k,n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-1, m] \frac{d[m-2n]}{2} \quad (2.33)$$

unde coeficienții  $d[n]$  sunt cei care intervin în relația (2.26).

Putem prezenta într-o manieră unificatoare ansamblul relațiilor enumerate anterior, care descriu legăturile existente între seturile de coeficienți  $a[.,.]$  și  $b[.,.]$  corespunzătorilor unor scale consecutive, dintr-un punct de vedere specific tehnicilor de filtrare liniară. Astfel, introducând notațiile:

$$\begin{aligned} a) \quad h[n] &= \frac{c[n]}{2} \\ b) \quad g[n] &= \frac{d[n]}{2} \\ c) \quad \tilde{h}[n] &= h[-n] \\ d) \quad \tilde{g}[n] &= g[-n] \end{aligned} \quad (2.34)$$

putem rescrie relațiile (2.31) și (2.33) sub forma:

$$\begin{aligned} a) \quad a[k,n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-1, m] \tilde{h}[2n-m] \\ b) \quad b[k,n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[k-1, m] \tilde{g}[2n-m] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Interpretarea relațiilor anterioare devine acum evidentă: setul de coeficienți  $a[k,n]$ , cu  $k$  fixat, se obține în urma efectuării produsului de convoluție dintre semnalul  $a[k-1,n]$  și semnalul  $\tilde{h}[n]$ , cu condiția ca din rezultatul obținut să reținem numai eşantioanele de rang par. Cu alte cuvinte, semnalul  $a[k-1,n]$  se aplică la intrarea unui filtru discret având funcția pondere  $\tilde{h}[n]$ , iar răspunsul acestuia *se decimează* cu factorul 2 (adică se păstrează numai unul din 2 eşantioane consecutive, în cazul nostru fiecare al doilea eşantion). Similar, coeficienții  $b[k,n]$  se obțin la ieșirea unui filtru discret având funcția pondere  $\tilde{g}[n]$ , tot în urma decimării răspunsului cu factorul 2. O interpretare grafică sugestivă a celor de mai sus este prezentată în partea stângă a Fig. 2.12, în care perechea de filtre  $\{h[-n], g[-n]\}$  asigură *analiza*

semnalului  $a[k-1, n]$  aplicat la intrare, generând perechea de semnale  $\{a[k, n], b[k, n]\}$ . Pe de altă parte, se poate parcurge și calea inversă, prin care semnalul  $a[k-1, n]$  se poate sintetiza prin prelucrarea adecvată a perechii de semnale  $\{a[k, n], b[k, n]\}$ . Se poate arăta că mecanismul de reconstrucție se bazează pe relația [17]:

$$a[k-1, n] = 2\tilde{a}[k, n] + 2\tilde{b}[k, n] \quad (2.36)$$

unde semnalele  $\tilde{a}[k, n]$  și  $\tilde{b}[k, n]$  se obțin astfel:

$$\begin{aligned} \tilde{a}[k, n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} a[k, l] c[n-2l] \\ \tilde{b}[k, n] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} b[k, l] d[n-2l] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Interpretarea acestor relații este următoarea: semnalele  $\tilde{a}[k, n]$  și  $\tilde{b}[k, n]$  se obțin prin *interpolarea* cu un factor egal cu 2 a ieșirilor a două filtre discrete având funcțiile de transfer  $c[n]$ , respectiv  $d[n]$ . Interpolarea este un proces prin care se urmărește creșterea frecvenței de eșantionare a unui semnal prin inserarea între 2 eșantioane consecutive ale acestuia a unui număr de eșantioane intermediare, în cazul cel mai simplu (folosit și aici) acestea având toate valoarea 0. Principiul este sugerat în partea dreaptă a Fig. 2.12, care ilustrează mecanismul prin care se asigură *sinteza* semnalului  $a[k, n]$ .

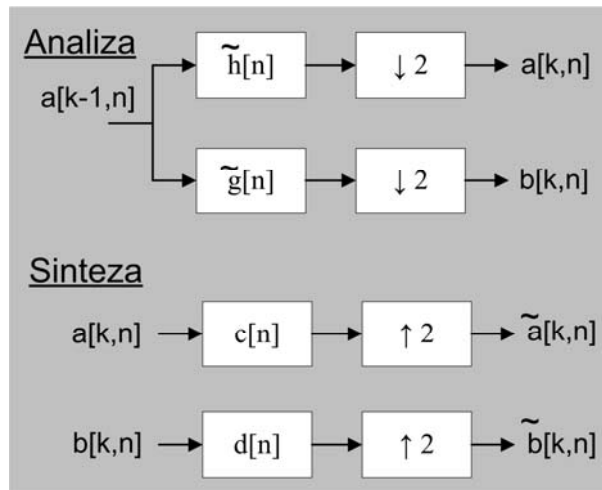


Fig. 2.12 Analiza și sinteza setului de coeficienți a

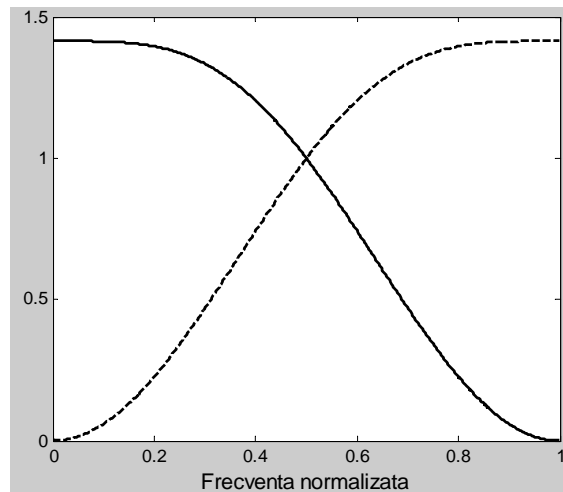
Diversele constrângeri pe care le satisfac coeficienții  $c[n]$ , ilustrate prin relațiile (2.23) și (2.24) se “traduc” acum astfel:

$$\begin{aligned} a) \quad & \sum_n h(n) = 1 \\ b) \quad & H(0) = 1 \\ c) \quad & |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

unde  $H(\omega)$  desemnează răspunsul în frecvență al filtrului cu funcția pondere  $h[n]$ . Ținând cont de proprietățile transformatei Fourier, din relația (2.33c) obținem imediat că:

$$\begin{aligned} a) \quad & H(0) = \tilde{H}(0) = 1 \\ b) \quad & H(\pi) = \tilde{H}(\pi) = 0 \\ c) \quad & |\tilde{H}(\omega)|^2 + |\tilde{H}(\omega + \pi)|^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ultima relație implică faptul că funcția  $|H(\omega + \pi)|$  se obține prin simetrizarea răspunsului  $|H(\omega)|$  în raport cu frecvența centrală  $\omega = \pi/2$ , după cum se indică în Fig. 2.13. Se spune din acest motiv că filtrele  $H(\omega)$  și  $\tilde{H}(\omega)$  formează o pereche de **filtre în cuadratură** (*Quadrature Mirror Filters - QMF*) [19, 20].



**Fig. 2.13** Răspunsul în frecvență al unor filtre în cuadratură: filtrul H - linie continuă, filtrul G - linie întreruptă

**Observație:**

Nu orice pereche de filtre care respectă condiția de simetrie în raport cu frecvența centrală  $\omega = \pi/2$  îndeplinește automat și condiția exprimată prin relația (2.37c). Filtrele QMF care îndeplinesc și această condiție se numesc “cu reconstrucție perfectă” (*perfect reconstruction QMF*).

În mod similar, pornind de la constrângerile specifice coeficienților  $d[n]$  precizate în relațiile (2.27), se ajunge la următoarele condiții:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \\
 b) \quad & |\tilde{G}(\omega)|^2 + |\tilde{G}(\omega + \pi)|^2 = 1 \\
 c) \quad & G(0) = \tilde{G}(0) = 0 \\
 d) \quad & |G(\pi)| = |\tilde{G}(\pi)| = 1
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Mai mult, în mod asemănător relațiilor (2.28), se poate formaliza legătura nemijlocită dintre perechile de filtre  $\{H(\omega), \tilde{H}(\omega)\}$  și  $\{G(\omega), \tilde{G}(\omega)\}$  sub forma:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & |H(\omega)|^2 + |G(\omega)|^2 = 1 \\
 b) \quad & H^*(\omega)H(\omega + \pi) + G^*(\omega)G(\omega + \pi) = 0 \\
 c) \quad & |\tilde{H}(\omega)|^2 + |\tilde{G}(\omega)|^2 = 1 \\
 d) \quad & \tilde{H}^*(\omega)\tilde{H}(\omega + \pi) + \tilde{G}^*(\omega)\tilde{G}(\omega + \pi) = 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Relațiile (2.27) și (2.28) împreună cu cele anterioare conduc la identificarea unor legături interesante și în domeniul timp:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \sum_n h[n]h[n+2k] = \frac{1}{2}\delta[k] \\
 b) \quad & \sum_n g[n]g[n+2k] = \frac{1}{2}\delta[k] \\
 c) \quad & \sum_n h[n]g[n+2k] = 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

care sugerează faptul că funcțiile pondere  $h[n]$ , respectiv  $g[n]$  sunt ortogonale cu versiunile translate ale acestora cu un număr par de indecși.

D. Generarea funcțiilor  $\phi(t)$  și  $\psi(t)$  pe baza coeficienților  $h[n]$  și  $g[n]$

După cum s-a menționat la un moment dat, semnalele  $\phi(t)$  și  $\psi(t)$  nu admit, de regulă, expresii analitice compacte, astfel încât în practică suntem nevoiți să facem apel la metode numerice pentru generarea acestora. În mod concret, suntem interesați de posibilitatea de obținere a acestor forme de undă pornind de la seturile de coeficienți  $h[n]$  și  $g[n]$  care caracterizează filtrele discrete care intervin în relațiile care permit obținerea semnalelor  $a[k,n]$  și  $b[k,n]$  specifice analizei de tip *wavelet*. În acest sens, folosind notația  $c[n] = 2h[n]$  în ecuația de dilatație (2.21) se poate scrie:

$$\phi(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \phi(2t - n) \Rightarrow \phi\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \phi(t - n) \quad (2.43)$$

Aplicând transformata Fourier relației anterioare obținem:

$$\Phi(2\omega) = H(\omega)\Phi(\omega) \quad (2.44)$$

Aplicarea repetată a acesteia conduce la:

$$\Phi(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(\frac{\omega}{4}\right) \dots H(0), \Phi(0) = 1 \quad (2.45)$$

Transformata Fourier inversă a funcției  $\Phi(\omega)$  permite obținerea funcției de scalare  $\phi(t)$ , iar funcția de tip *mother wavelet*  $\psi(t)$  se deduce apoi folosind relația (2.26) și setul de coeficienți  $d[n] = 2g[n]$ . Un algoritm iterativ de generare a semnalelor  $\phi(t)$  și  $\psi(t)$  a fost propus în [3] și pornește de la o formă inițială a funcției de scalare dată de funcția Haar:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (2.46)$$

Calculul iterativ se bazează pe ecuația de dilatație și se formulează astfel:

$$\phi_n(t) = 2 \sum_l h[l] \phi_{n-1}(2t - l) \quad (2.47)$$

urmând ca funcția de scalare să fie obținută ca  $\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t)$  (în practică, procesul iterativ este stopat testând dacă modificarea funcției  $\phi_n(t)$  de la o iterație la alta scade sub o anumită valoare de prag).

## 2.4 Transformata *wavelet* în timp discret

Analiza dezvoltată în cuprinsul paragrafului precedent se referă la posibilitatea reprezentării *semnalelor continue* de energie finită sub forma unei combinații liniare a unor versiuni translate și scalate ale unei funcții prototip denumite *mother wavelet*. După cum s-a arătat, limitările de ordin practic impun folosirea unui set finit de termeni într-o astfel de reprezentare, astfel încât atât procesul de translație, cât și cel de scalare (indexate de parametri reali) se fac într-o manieră particulară, bazată pe discretizarea gamei dinamice admisibile ale indecșilor respectivi (eșantionare diadică). Mai mult, punctul de vedere bazat pe aplicarea semnalului analizat la intrarea unui ansamblu de filtre trece-bandă având factor de calitate constant și cerința ca numărul acestora să fie finit a condus la introducerea noțiunii de funcție de scalare (care permite modelarea componentelor de joasă frecvență ale semnalului studiat).

Aceleași principii de pot aplica și în cazul reprezentării unor *semnale discrete* în raport cu baze de tip *wavelet*. Astfel, pornind de la un semnal discret  $f[n]$  să definim semnalul analogic:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\phi(t-n) \quad (2.48)$$

unde  $\phi(t)$  este o funcție de scalare de tipul celor analizate în paragraful precedent. Păstrând interpretarea intuitivă potrivit căreia relația (2.30) poate fi privită ca oferind o aproximare (în fapt, o proiecție) a semnalului  $f(t)$  pe un subspațiu liniar particular  $V_k$ , generat de o bază de forma  $\{\phi(2^{-k}t-l), l \in \mathbb{Z}\}$ , deducem imediat că:

$$f[n] = a[0, n] \quad (2.49)$$

Ca urmare, mecanismul ilustrat în Fig. 2.11 de generare succesivă a seturilor de coeficienți  $\{a[k, n], b[k, n]\}$  care intervin în descompunerea de tip *wavelet* se poate aplica direct, interpretând pur și simplu valorile eșantioanelor  $f[n]$  drept setul de coeficienți de aproximare valabili pentru *scala cu rezoluția cea mai mică* (și, implicit, care conține maximul de informație din semnalul analizat). Ca terminologie, setul de coeficienți  $\{b[k, n]\}$  este denumit, printr-un abuz de limbaj,

tot Transformată Wavelet Discretă, deși o denumire mai corectă ar fi cea de **Transformată Wavelet Discretă în timp discret** (DTWT).

Din punct de vedere practic suntem interesați de utilizarea unui algoritm eficient de calcul al seturilor de coeficienți *wavelet*, așa cum beneficiem, de exemplu, în cazul Seriei Fourier Discrete de soluția bazată pe algoritmul FFT (*Fast Fourier Transform*). Un astfel de algoritm există, acesta este denumit *algoritm piramidal* și a fost introdus de către S. Mallat [11, 13]. Pentru a fixa ideile, să reamintim mai întâi definiția binecunoscută a Seriei Fourier Discrete asociate unui semnal  $x(n)$  având lungimea de  $N$  eșantioane:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{-nk}, \quad w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \quad (2.50)$$

Relația anterioară admite o interpretare matricială de forma  $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ , descrisă intuitiv astfel:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \xrightarrow{SFD} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & \dots & w_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & \dots & w_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

O definiție principală asemănătoare este valabilă și în cazul transformatei DWT, cu diferența că în locul coeficienților de forma  $w_N^{-nk}$  vom folosi seturile de coeficienți care definesc filtrele  $h[n]$  și  $g[n]$  din relația (2.34). Vom ilustra această observație prin exemplul din relația (2.52), care presupune un set de filtre având funcții pondere de lungimi finite<sup>1</sup> (în acest caz, cu numai 4 coeficienți), deși mecanismul poate fi generalizat pentru lungimi oarecare. De exemplu, în cazul binecunoscut al unor clase de semnale *wavelet* introduse de către cercetătoarea Ingrid Daubechies avem [3]:  $\{g_0, g_1, g_2, g_3\} = \{h_3, -h_2, h_1, -h_0\}$ , unde coeficienții  $h[n]$  au valorile:

$$\{h_0, h_1, h_2, h_3\} = \left\{ \frac{(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}, \frac{(3+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}, \frac{(3-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}, \frac{(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}} \right\}.$$

<sup>1</sup> Ordinul filtrelor este legat de numărul de *momente statistice nule* asociate funcției  $\psi(t)$  [3].

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x} \xrightarrow{DWT} \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \dots & 0 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \\ 0 \dots & & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 \dots & & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & 0 \dots & & 0 & h_0 & h_1 \\ g_2 & g_3 & 0 \dots & & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Relația anterioară necesită o serie de comentarii:

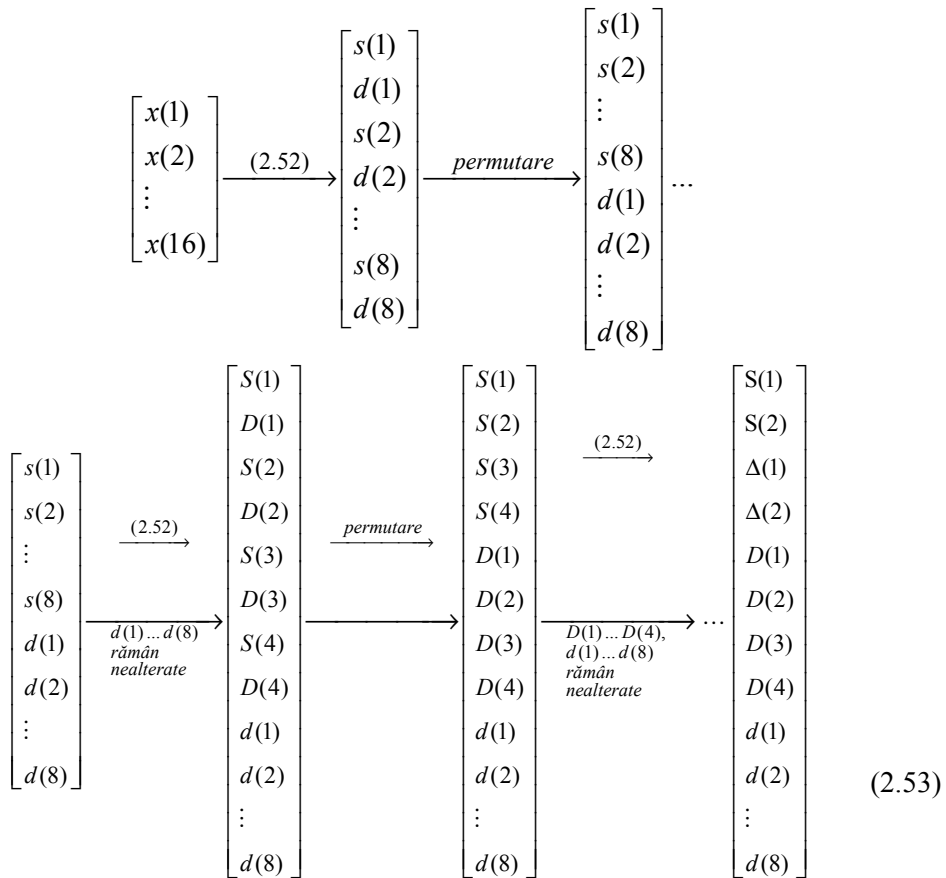
- valorile propriu-zise ale coeficienților care definesc filtrele  $h[n]$  și  $g[n]$  rezultă impunând pe de o parte constrângerile enumerate în relațiile (2.38) și (2.40), iar pe de altă parte cerințe suplimentare, referitoare la proprietăți speciale pe care dorim să le dobândească semnalul prototip *mother wavelet*  $\psi(t)$ . Aceste proprietăți sunt denumite generic *condiții de regularitate* și se referă de obicei la forțarea unui suport compact pentru semnalul  $\psi(t)$  (de unde și denumirea de “undă mică”), eventual la asigurarea unui grad ridicat de simetrie a formei de undă, sau a unei evoluții suficient de line (*smooth*) a acesteia.

- se observă că ultimele 2 linii au un aspect distinct de restul celorlalte. Explicația este legată de necesitatea de a folosi un număr de eșantioane care se găsesc dincolo de fereastra formată din valorile  $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$  (în cazul nostru avem nevoie de 2 eșantioane suplimentare,  $x[N]$  și  $x[N+1]$ ) pentru a putea calcula inclusiv ultimele valori ale transformatei DWT. Pentru a rezolva această problemă au fost propuse în literatură 2 categorii de soluții: a) prelungirea ferestrei de timp analizate cu un număr de valori convenabil alese, putându-se opta pentru: copierea valorii ultimului eșantion disponibil  $x[N-1]$ , periodizarea semnalului analizat (exact ca în cazul FFT; de altfel, aceasta este situația care corespunde matricii din relația (2.52)), sau reflexia “în oglindă” a formei de undă; b) modificarea valorilor setului de coeficienți de pe primele și ultimele linii ale matricii  $\mathbf{W}$ , cu alte cuvinte alterarea funcției prototip *mother wavelet* într-un număr limitat de puncte ale domeniului de parametri (scală, translație). Tratarea cu atenție a acestor “efecte de capăt” este necesară cu precădere atunci când apar diferențe semnificative de amplitudine între



începutul și sfârșitul formei de undă, precum și în aplicații de predicție, acolo unde ultimele valori ale semnalului analizat sunt și cele mai importante.

Relația matricială precedentă poate fi interpretată în sensul următor: se aplică două operații de filtrare distincte asupra vectorului de intrare folosind filtrele descrise de  $h[n]$  și  $g[n]$ , se decimează cu un factor egal cu 2 rezultatele obținute și apoi se întretes secvențele rămase în urma decimării. Acesta este de fapt mecanismul din spatele algoritmului piramidal amintit anterior, care presupune ca și în cazul FFT ca lungimea ferestrei de timp analizate să fie egală cu o putere a lui 2, ilustrat intuitiv mai jos pentru un semnal de intrare cu lungimea de 16 eșantioane:



## 2.5 Discuție asupra analizei de tip *wavelet*

Din dorința de a înlesni introducerea noțiunilor și terminologiei specifice analizei de tip *wavelet*, în cuprinsul paragrafelor precedente am urmărit o prezentare orientată cu precădere pe aspecte ingineresti, aflate la îndemâna celor familiarizați cu metodele de filtrare liniară, transformata Fourier, sau alte instrumente din arsenalul teoriei semnalelor. În mod intenționat am încercat să limităm la strictul necesar volumul semnificativ de ecuații, constrângeri și relații de interdependență care apar în cărțile și articolele consacrate acestui subiect și care fundamentează cu rigoare matematică unul dintre cele mai active domenii de cercetare din ultimele două decenii. Fără a abdica de la acest principiu, considerăm totuși necesar să discutăm, chiar și sumar, o serie de aspecte relevante pentru subiectul analizat, în măsură să completeze sau să clarifice cele prezentate anterior.

### *Analiza multirezoluție*

Transformata *wavelet* reprezintă una dintre modalitățile naturale (nu și singura) de a implementa un tip particular de reprezentare a semnalelor denumit **analiză multirezoluție**. Esența acestei abordări constă în faptul că semnalul analizat este descris printr-o succesiune de aproximări care conțin din ce în ce mai multă informație. Exemplul clasic care ilustrează intuitiv acest principiu este următorul: privită de la mare distanță, o pădure nu poate fi caracterizată decât prin aspectul său de ansamblu. Pe măsură ce ne apropiem vom începe să distingem copacii, apoi ramurile acestora, apoi frunzele. Acesta este de fapt specificul analizei multirezoluție: fiecare nivel de aproximare conține pe de o parte *întreaga* informație disponibilă la nivelul precedent, la care se adaugă o componentă suplimentară de *detaliu*. Din punct de vedere matematic, analiza multirezoluție presupune aproximarea unor funcții prin proiecții succesive pe un ansamblu de subspații vectoriale liniare **incluse unele în altele** (*nested vector spaces*)  $\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$  și care respectă următorul set de *axiome* [17]:

a) reuniunea acestor subspații este *densă* în spațiul vectorial al funcțiilor având energie finită. Conceptul de densitate este definit astfel în mod intuitiv: date fiind 2 mulțimi  $A \subset B$ , se spune că mulțimea  $A$  este densă în mulțimea  $B$  dacă pentru orice

element  $b \in B$  putem găsi un element  $a \in A$  oricât de apropiat de  $b$ . De exemplu, mulțimea numerelor raționale  $Q$  este densă în mulțimea numerelor reale  $R$ . În cazul nostru, reuniunea setului de subspații considerat va conduce la un spațiu vectorial notat  $V_{\infty}$  care este dens în spațiul  $L_2(R)$  al semnalelor de energie finită.

b) intersecția subspațiilor considerate se reduce la un vector identic nul

c) dacă  $f(t) \in V_k$  atunci  $f(2t) \in V_{k-1}$  și viceversa. Această relație implică dilatarea sau comprimarea semnalelor aparținând diverselor subspații considerate. Dacă definim o ierarhie a acestor subspații în funcție de gradul de detaliu pe care îl conțin, putem spune că subspațiul  $V_{k-1}$  este “mai fin” (mai detaliat) decât  $V_k$ . Trecerea de la un subspațiu mai fin la unul mai “grosier” și invers se face prin dilatarea sau comprimarea semnalelor analizate printr-un factor egal cu 2.

d) există o funcție  $\phi(t)$  (denumită funcție de scalare) astfel încât setul  $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  formează o bază pentru subspațiul  $V_0$ . Ca urmare, un semnal  $f_0(t) \in V_0$  se poate scrie sub forma:

$$f_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[0,n] \phi(t-n) \quad (2.54)$$

Nu este obligatoriu ca semnalele care formează baza  $\{\phi(t-k), k \in \mathbb{Z}\}$  să fie ortogonale, deși ortogonalitatea oferă avantaje în multe privințe.

Relația dintre analiza multirezoluție și cea de tip *wavelet* devine acum clară (excepție făcând de testarea condiției de densitate, mai dificil de justificat sumar): relațiile (2.20) indică faptul că versiunile translate ale funcției de scalare formează o bază ortogonală, relația (2.22) conduce la concluzia  $f(t) \in V_k \Leftrightarrow f(2t) \in V_{k-1}$ , iar ecuația de dilatație (2.21) devine o consecință a relației precedente, dacă se adaugă condiția suplimentară  $V_0 \subset V_1$  (din acest motiv, relația (2.22) implică practic și că  $V_k \subset V_{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ). Surplusul de detaliu obținut prin trecerea de la un nivel de rezoluție la altul poate fi modelat tot ca un subspațiu vectorial, notat  $W_k$ , astfel încât putem scrie  $V_{k-1} = V_k + W_k$ . Acesta este de fapt subspațiul generat de baza  $\{\psi(2^{-k}t-l), l \in \mathbb{Z}\}$ , iar subspațiul  $V_k$  este generat de baza  $\{\phi(2^{-k}t-l), l \in \mathbb{Z}\}$ .

*Condiții de regularitate*

Am amintit în contextul paragrafelor precedente că unul dintre avantajele analizei de tip *wavelet* în comparație cu analiza Fourier o constituie flexibilitatea în alegerea funcției prototip *mother wavelet*  $\psi(t)$ . Proprietățile speciale avute în vedere se pot referi la caracterul compact în timp sau în frecvență al acestei funcții, la simetria formei de undă sau la caracterul ei lipsit de variații bruște (*smoothness*). În particular, aspectele legate de micșorarea *simultană* a duratei (suportului) în domeniile timp și frecvență sunt considerate esențiale (să nu uităm că un semnal *wavelet* trebuie să reprezinte totuși o undă “mică”), iar acestea sunt asigurate de așa-numitele **condiții de regularitate** [3]. În esență, acestea indică viteza de scădere spre zero a semnalului  $\psi(t)$  și formularea lor este deseori prezentată în literatură făcând apel la condiția ca un anumit număr de *momente statistice* ale acestui semnal să se anuleze. În mod concret, momentul statistic de ordinul  $k$  se definește prin relația [14]:

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt \quad (2.55)$$

Conform relației (2.5) avem întotdeauna îndeplinită condiția  $M_0 = 0$ , iar cu cât avem mai multe momente statistice nule (sau foarte mici) cu atât semnalul  $\psi(t)$  obținut (și, respectiv, funcția de scalare  $\phi(t)$ ) va fi mai “regulat”, în sensul că va avea un aspect lipsit de discontinuități. Pe de altă parte, se poate arăta că anularea unui anumit număr de momente statistice ale funcției *wavelet*  $\psi(t)$  este legată nemijlocit de restricții impuse răspunsurilor în frecvență  $H(\omega)$  și  $G(\omega)$  asociate filtrelor  $h[n]$  și  $g[n]$  care formează perechea de filtre în cuadratură introdusă în paragraful anterior. Astfel, existența unui număr de  $K$  momente statistice care se anulează este echivalentă cu prezența unui număr de  $K$  zerouri în origine ale răspunsului  $G(\omega)$ , respectiv  $K$  zerouri în dreptul frecvenței maxime  $\omega = \pi$  pentru răspunsul în frecvență  $H(\omega)$  (reamintim că filtrul  $H(\omega)$  are caracter trece-jos, iar  $G(\omega)$  este de tip trece-sus) [17]. Ca observație suplimentară, numărul momentelor statistice care se anulează apare uneori și în denumirea funcției de tip *mother wavelet* (de regulă, terminologia este de tipul *NumeFuncție\_2n*, unde  $n$  este numărul momentelor statistice nule).

*Invarianța la translație a transformatei wavelet*

Necesitatea de a efectua operațiuni de decimare pentru calculul coeficienților care definesc transformata DWT face ca acest tip de procesare să aibă caracter **variabil în timp** (mai general, dacă semnalul asupra căruia acționează DWT nu depinde de variabila timp, ci de un alt argument – de exemplu, spațiu – se spune că transformata variază în raport cu translația/deplasarea acestuia). Astfel, spre deosebire de transformata Fourier, al cărei modul rămâne nemodificat în urma translației argumentului, în cazul transformatei DWT putem asista la modificări substanțiale ale valorilor coeficienților chiar dacă semnalul analizat suferă translații minore. În practică această comportare constituie un dezavantaj, astfel încât în literatură au fost propuse o serie de soluții care să elimine sau să atenueze această sursă de variabilitate. În principiu, metodele urmăresc creșterea redundanței în reprezentarea de tip DWT, relaxând condiția de eșantionare diadică sau acționând asupra perechii de semnale prototip  $\{\phi(t), \psi(t)\}$ . Dintre aceste soluții amintim următoarele: a) algoritmul “cu găuri” (*à trous algorithm*) propus de către S.Mallat [11, 13] (în esență, se înlocuiește eșantionarea diadică a funcțiilor prototip pentru obținerea semnalelor se forma  $\psi(2^{-k}t)$  corespunzătoare unui set de scale cu rezoluție distinctă printr-o operație de *interpolare* aplicată unei singure forme de undă  $\psi(t)$  – interpolarea presupune inserarea unui număr corespunzător de zerouri între 2 eșantioane succesive ale acestora, urmată de filtrare trece-jos); b) generarea unor funcții prototip de natură complexă [9] (în acest caz, se utilizează perechi de filtre  $\{h[n], g[n]\}$  distincte pentru a obține partea reală, respectiv cea imaginară a funcțiilor  $\{\phi(t), \psi(t)\}$ ); c) piramida Laplaciană [1]; d) utilizarea drept coeficienți DWT numai a valorilor extreme (minime și maxime) ale modulului coeficienților rezultați în urma aplicării prealabile a unei transformate DWT uzuale (cu eșantionare diadică) folosind funcții de tip *mother wavelet* cu unul sau două momente statistice nule [12]. Deși utile din perspectiva atingerii scopului propus, toate aceste soluții presupun însă un volum de calcul mai mare decât cel necesar evaluării transformatei DWT uzuale.

### *Selecția unei baze wavelet optimale*

Subliniind încă o dată avantajul flexibilității în selectarea unei funcții prototip de tip *wavelet* și, implicit, a bazei generate de aceasta, merită amintită posibilitatea ca alegerea să fie ghidată de criteriul eficienței reprezentării unui semnal dat în raport cu o astfel de bază. Prin eficiență înțelegem aici proprietatea ca în descompunerea semnalului studiat să existe un număr mic de coeficienți cu valoare semnificativă, restul putând fi neglijați. Rezolvarea unei astfel de probleme este întâlnită în literatură sub denumirea *best basis selection* și pornește de la formularea unei funcții de cost, inspirată de regulă din teoria transmisiunii informației, care trebuie să îndeplinească câteva condiții [2]:

- să ofere o imagine a vitezei de scădere a setului de coeficienți care apar în descompunerea de tip *wavelet* (2.18). De exemplu, funcția de cost trebuie să capete valori mari dacă majoritatea coeficienților au valori comparabile, respectiv să aibă valoare mică dacă apar puțini coeficienți semnificativi.
  - ca și în cazul general, să păstreze o bună localizare simultan în timp și frecvență
  - componentele bazei să fie cât mai independente, astfel încât o aceeași porțiune din semnalul analizat să fie descrisă folosind cât mai puține astfel de componente.
- Drept funcție de cost a fost folosită cu succes entropia, deși în principiu am putea folosi și alte formulări.

## **2.6 Aplicații ale analizei de tip *wavelet***

Dezvoltate inițial în legătură cu analiza semnalelor de natură seismică, reprezentările folosind baze de tip *wavelet* au cunoscut rapid o viteză de extindere remarcabilă în aplicații practice dintre cele mai diverse, printre care amintim tehnicile de compresie, filtrarea zgomotelor, rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale, analiza semnalelor biomedicale și financiare, astronomie, fizica nucleară, prelucrarea semnalelor vocale [6]. Exemplele cele mai cunoscute sunt probabil cele referitoare la crearea de către FBI a standardului de stocare a imaginilor reprezentând amprente, respectiv elaborarea standardului de compresie JPEG2000. În cele ce urmează vom prezenta câteva modalități practice de aplicare a acestui

instrument elegant de procesare a semnalelor, în speranța de a trezi interesul cititorilor pentru aprofundarea studiului în această direcție.

### 2.6.1 Filtrarea zgomotelor

Există numeroase aplicații practice importante în care se dorește eliminarea zgomotelor suprapuse peste informația considerată de interes, cu condiția ca forma de undă utilă să nu fie alterată sensibil, în particular să fie menținute momentele la care apar variații semnificative de amplitudine. Drept exemple în acest sens putem cita analiza semnalelor biomedicale (ECG, EEG), datele rezultate din imagistica cu rezonanță magnetică sau nucleară, sau procesarea seriilor de timp financiare. Transformata DWT oferă o soluție eficientă în astfel de cazuri speculând faptul că, de cele mai multe ori, zgomotele afectează numai coeficienții de pe anumite scale de reprezentare, de regulă corespunzătoare unor componente de detaliu fine. În fapt, varianta DWT este de multe ori superioară soluției bazate pe utilizarea transformatei Fourier, aceasta fiind incapabilă, după cum s-a discutat la începutul acestui capitol, să mențină nealterate intervalele în care sunt prezente variații bruște ale amplitudinii semnalului analizat. În mod concret, utilizarea DWT în filtrarea zgomotelor presupune parcurgerea următorilor pași:

- se calculează coeficienții corespunzători transformatei DWT
- se compară modulul acestora cu o valoare de prag aleasă adecvat și se anulează valorile tuturor coeficienților situați sub prag. De regulă, se aleg valori de prag individuale pe fiecare scală în parte.
- se calculează transformata DWT inversă

Tehnica descrisă anterior este cunoscută sub denumirea *wavelet shrinkage* [4], iar anularea coeficienților situați sub o valoare de prag reprezintă așa-numita versiune *hard* de filtrare a zgomotului. Se utilizează uneori și o versiune *soft* [5], în care valorile coeficienților considerați “mici” nu se anulează, ci suferă o transformare neliniară (de exemplu, de gen tangentă hiperbolică) al cărei efect se reduce din nou la micșorarea valorii acestora. În literatură au fost propuse o serie de modalități riguroase de alegere a valorilor adecvate ale pragurilor, de regulă bazate pe criterii inspirate din teoria transmisiunii informației.

În Fig. 2.14 și 2.15 prezentăm 2 exemple referitoare la filtrarea unui semnal unidimensional, respectiv a unei imagini. Metodele de filtrare avute în vedere sunt: filtrare liniară – se păstrează din totalitatea setului de coeficienți DWT numai cei plasați pe primele scale, indiferent de modulul acestora (oarecum asemănător filtrării trece-jos de tip Fourier); filtrare neliniară – se anulează coeficienții ale căror amplitudini sunt mai mici decât o valoare de prag (în mod concret, în acest caz valoarea de prag aleasă reprezintă 20% din gama dinamică vârf-la-vârf a tuturor coeficienților); filtrare invariantă – se efectuează comparația cu aceeași valoare de prag, în schimb transformata DWT este calculată cu o metodă care asigură invarianța la translație.

### 2.6.2 Metode de compresie

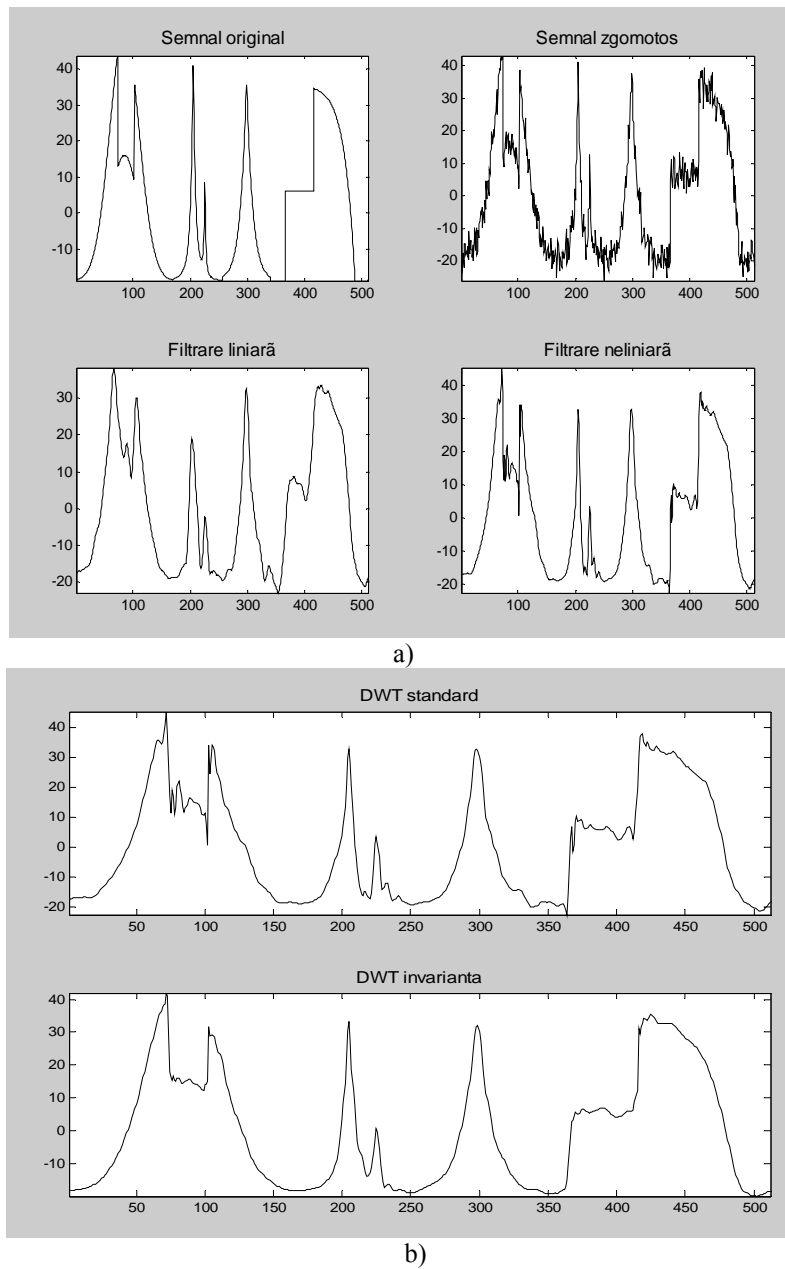
Domeniul în care transformata *wavelet* a cunoscut cele mai spectaculoase aplicații practice este probabil cel al tehnicilor de compresie, în special în cazul imaginilor. Standardul FBI de stocare a imaginilor reprezentând amprente (*Wavelet Scalar Quantization* - WSQ) [21], precum și introducerea standardului JPEG2000 reprezintă cele mai elocvente exemple din acest punct de vedere. În Fig. 2.16 se prezintă imagini rezultate în urma compresiei unei amprente folosind standardul WSQ, prin comparație cu aceeași amprentă stocată în formatul JPEG, în condițiile în care dimensiunile fișierelor rezultate sunt comparabile (32 kB, respectiv 34 kB, imaginea originală având 616 kB și dimensiunile de 768x768 pixeli, cu 8 nivele de gri). Se observă că imaginea în format JPEG prezintă o serie de modificări semnificative ale detaliilor care caracterizează amprenta<sup>1</sup>.

Să menționăm pe scurt că standardul WSQ presupune parcurgerea a 3 etape de procesare: aplicarea transformatei DWT folosind o pereche specială de funcții  $\{\phi(t), \psi(t)\}$ , cuantizarea coeficienților DWT într-o manieră dependentă de rezoluția respectivă, urmată de așa-numita codare entropică (în fapt, o combinație de codare Huffman și codare *run-length*), în urma căreia se obține o reprezentare folosind aproximativ 0.75 biți/pixel, sau o rată de compresie în jur de 15:1.

---

<sup>1</sup> Imaginile în format WSQ au fost obținute cu aplicația *WSQViewer* elaborată de către firma Cognaxon, disponibilă gratis la adresa [www.cognaxon.com](http://www.cognaxon.com)





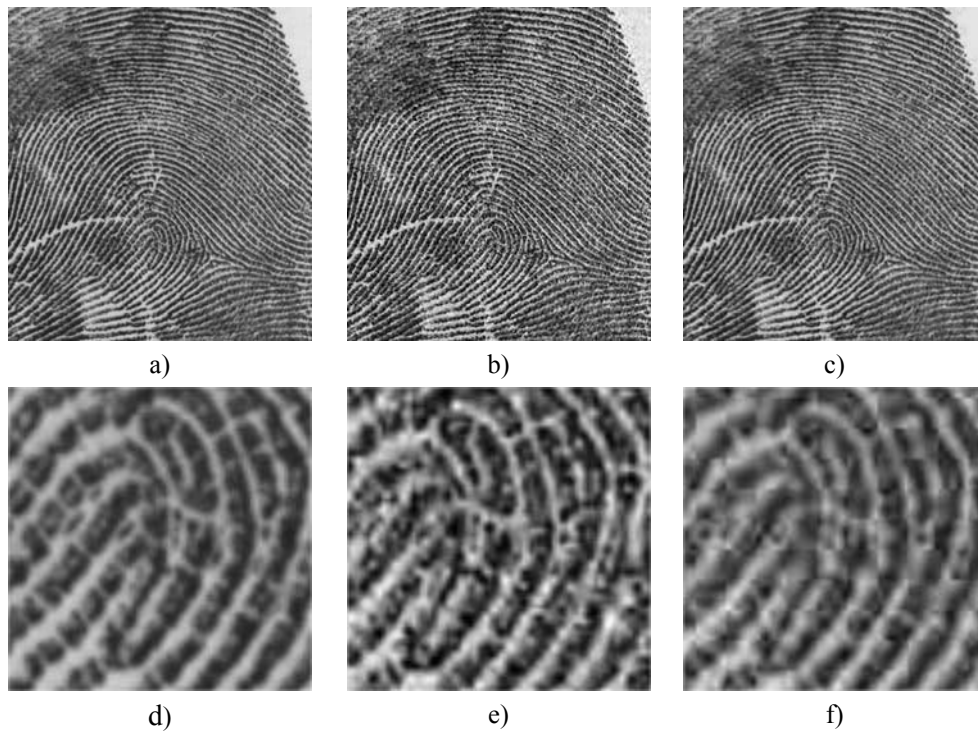
**Fig. 2.14** Filtrarea zgomotului folosind: a) filtrare liniară și neliniară; b) filtrare neliniară aplicată transformatei DWT standard, respectiv versiunii invariante la translație



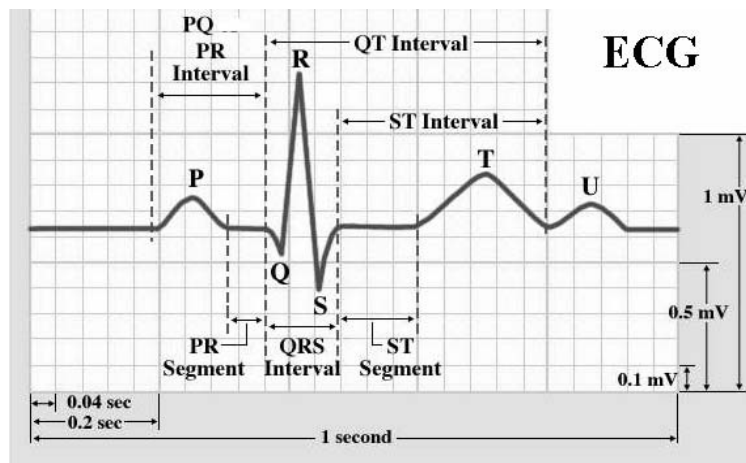
**Fig. 2.15** Filtrarea zgomotului din imagini

### 2.6.3 Analiza semnalelor biomedicale – semnalul ECG

Electrocardiograma (ECG) reprezintă înregistrarea (de obicei la suprafața corpului) a variațiilor de potențial ale vectorului rezultat din sumarea momentană, simultană și spațială a fenomenelor electrice de depolarizare și repolarizare a ansamblului de fibre miocardice în cursul unei revoluții cardiace. Aspectul tipic al semnalului ECG pune în evidență prezența unui set de puncte, segmente și intervale caracteristice, ca în Fig. 2.17. Identificarea cu acuratețe a tuturor acestor mărimi (ca și analiza comparativă cu valori măsurate anterior) oferă unui specialist cardiolog informațiile necesare diagnosticării cu exactitate a eventualelor aspecte patologice. Informațiile cele mai importante sunt furnizate de aspectul și periodicitatea complexului QRS, asupra cărora se reflectă majoritatea afecțiunilor cardiovasculare.



**Fig. 2.16** Standardul de compresie a amprentelor WSQ:  
 a) imagine originală; b) imagine în format WSQ; c) imagine în format JPEG; d)-e) detalii



**Fig. 2.17** Aspect tipic al unui semnal ECG

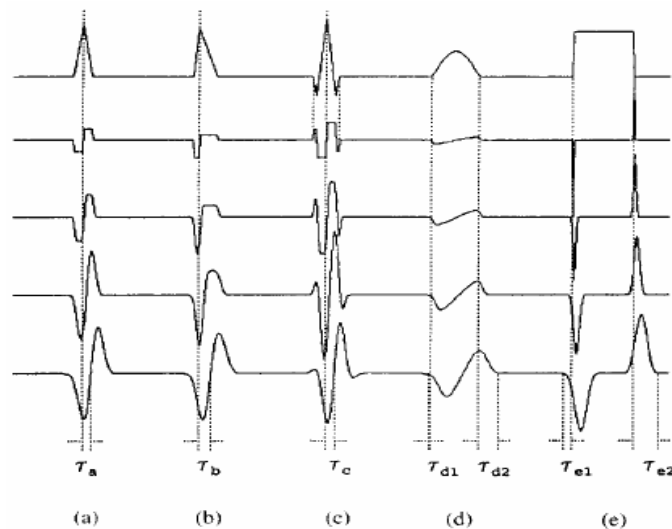
În particular, detecția unei R reprezintă o problemă dificilă deoarece forma de undă suferă modificări fiziologice substanțiale în cazul anumitor tipuri de afecțiuni, la care se adaugă prezența unei game largi de semnale perturbatoare (denumite generic artefacte) generate de contactul imperfect al senzorilor, mișcările respiratorii, brumul de rețea, etc. În mod concret, este posibil ca nu întotdeauna complexul QRS să reprezinte componenta cea mai puternică în semnalul ECG. Este de asemenea posibil ca undele P sau T, având aspecte similare cu ale complexului QRS, precum și impulsurile furnizate de către stimulatoarele cardiace să compromită operațiunea de detecție a complexului QRS. Cele mai multe dintre metodele tradiționale de detecție includ două module:

- un modul de preprocesare al cărui rol este de a accentua porțiunea din semnal care include complexul QRS (de obicei, prin filtrare trece-sus)
- un bloc de decizie care detectează prezența complexului QRS prin compararea cu o anumită valoare de prag.

Cel mai cunoscut procedeu este cel elaborat de către Pan-Tompkins, care presupune mai întâi o operație de filtrare trece-bandă pentru eliminarea zgomotului de înaltă frecvență, respectiv a componentelor foarte lent variabile, după care semnalul ECG este derivat pentru a evidenția mai clar prezența unei R (caracterizată de o pantă abruptă). Pentru a întări și mai mult efectul prezenței unor componente de frecvență înaltă în structura complexului QRS, semnalul obținut în urma derivării este ridicat la pătrat. Aprecierea cantitativă a energiei semnalului astfel obținut se realizează printr-o operație de integrare pe ferestre de timp de durată scurtă. Selecția benzii de frecvență a filtrului trece bandă, precum și alegerea duratei ferestrei de estimare a energiei semnalului trebuie efectuate cu atenție. Astfel, FTB trebuie ales pentru a realiza un compromis rezonabil între reducerea zgomotului și pierderea unor detalii de frecvență mare. Pe de altă parte, durata ferestrei de estimare a energiei nu trebuie să fie nici prea mare, pentru că astfel energia acumulată ar conduce rapid la depășirea valorii de prag, dar nici prea îngustă pentru că astfel s-ar acumula prea puțină energie. În concluzie, în domeniul frecvență, utilizarea unui FTB cu bandă fixată nu permite adaptarea la eventuale variații ale spectrului complexului QRS, iar pe de altă parte, în domeniul timp,

utilizarea unei ferestre de durată fixă nu permite adaptarea la schimbări ale duratei complexului QRS. Ca urmare, pentru a depăși limitările amintite anterior este necesară utilizarea unei tehnici care să permită adaptarea la variațiile din domeniul timp – frecvență specifice complexului QRS.

Justificarea utilizării unei reprezentări bazate pe transformata DWT pentru analiza unei serii de semnale elementare asemănătoare cu cele care intră în componența unui semnal ECG este ilustrată în Fig. 2.18 [8, 10]. Se observă că în cazul semnalelor de forma unor impulsuri triunghiulare, componentele de rezoluții diferite obținute în urma aplicării DWT sunt caracterizate de prezența unei perechi minim-maxim, iar trecerea prin zero pe scala de frecvență cea mai mare corespunde vârfului formei de undă. Chiar în cazul în care forma de undă nu e simetrică concluzia rămâne valabilă. În cazul semnalului din figura (c), foarte asemănătoare cu complexul QRS, apar trei perechi de valori minim și maxim cu amplitudini variabile. În cazul semnalului de frecvență joasă din figura (d) concluzia se păstrează dar amplitudinea e mult mai redusă. În sfârșit, în cazul impulsului dreptunghiular din figura (e) care modelează apariția unor modificări datorate prezenței unor zgomote, analiza multirezoluție conduce la apariția unor perechi de impulsuri ascuțite cu semne diferite.



**Fig. 2.18** Componente de detaliu rezultate din analiza DWT a unor semnale elementare

Principiul de detecție al punctelor caracteristice în semnalul ECG se bazează pe o descompunere multirezoluție de tipul celei prezentate anterior și identificarea unor astfel de perechi de valori minim-maxim prezente pe toate scalele. Componentele respective sunt obținute la ieșirea unui ansamblu de filtre trece-bandă cu factor de calitate constant, cu caracteristicile descrise în tabelul următor:

Tabelul 2.1: Benzile de trecere la 3 dB ale filtrelor cu Q-constant

Scală	Banda la 3dB (Hz)
S <sub>1</sub> : a = 2 <sup>1</sup>	62,5 ~ 125
S <sub>2</sub> : a = 2 <sup>2</sup>	18 ~ 58,5
S <sub>3</sub> : a = 2 <sup>3</sup>	8 ~ 27
S <sub>4</sub> : a = 2 <sup>4</sup>	4 ~ 13,5
S <sub>5</sub> : a = 2 <sup>5</sup>	2 ~ 6,5

Algoritmul de procesare presupune parcurgerea următorilor pași [8, 10]:

- *Detecția undelor R*: se bazează pe identificarea prezenței unor perechi de valori minime și maxime pe scalele 4, 3, 2 și 1. Inițial se identifică aceste perechi pe scala de rezoluție cea mai mare, cu numărul 4, pe care le vom nota  $\{n_k^4 \mid k = 1 \dots N\}$ . Dacă nu există astfel de valori extreme, vom atribui valoarea zero setului de valori  $n_k^3$ ,  $n_k^2$  și  $n_k^1$ . Se procedează similar pe scalele 3, 2 și 1. Există două motive pentru a efectua procesul de căutare al perechilor de valori extreme pornind de la scalele mari către cele mici: în primul rând numărul valorilor extreme este mult mai redus la scalele mari decât la cele mici, iar pe de altă parte zgomotul de înaltă frecvență e foarte redus pe scalele mari și nu va conduce la apariția unor valori extreme semnificative. În același timp, este posibil ca pe scalele mari să apară perechi de valori extreme generate de undele P și T însă efectul acestora pe scalele mici va fi nesemnificativ, astfel încât vor putea fi eliminate ușor.

Pentru a separa liniile de valori extreme provenite din undele R de cele care ar rezulta din cauza unor zgomote de frecvență ridicată, se calculează un așa numit exponent de regularitate  $\alpha$ , pe baza relației:

$$\alpha = \log_2 \alpha_{j+1}(n_k^{j+1}) - \log_2 \alpha_j(n_k^j)$$

Se poate demonstra că în cazul undelor R parametrul  $\alpha' = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  este pozitiv.

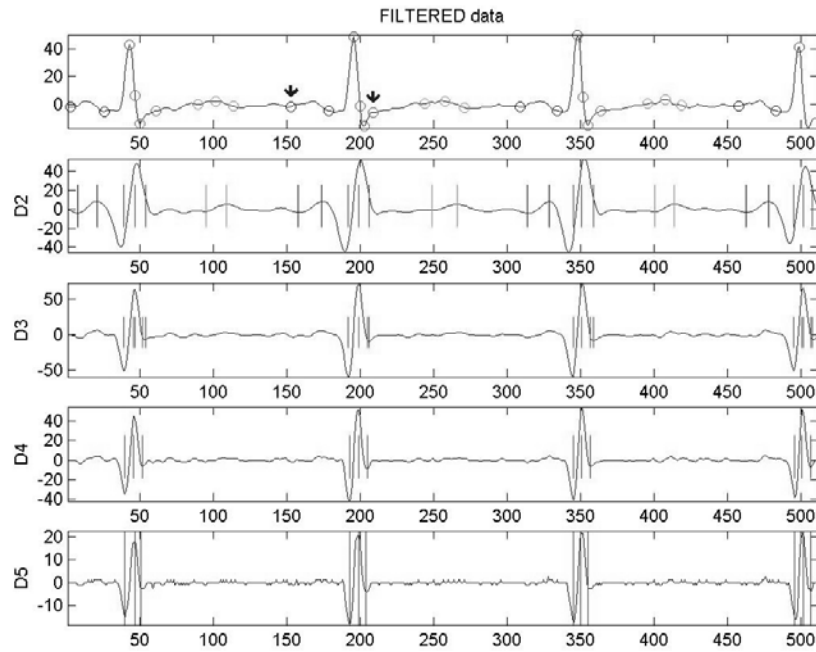
Este necesar de obicei să fie eliminate eventualele valori izolate de maxim sau minim care nu apar în perechi, respectiv cele redundante. Procedurile respective se bazează pe o serie de reguli stabilite empiric referitoare la intervalele de timp uzuale care separă undele R succesive.

- *Detecția limitelor complexului QRS:* începutul complexului QRS e reprezentat de începutul undei Q, iar sfârșitul de terminarea undei S. În mod empiric, undele Q și S au frecvență ridicată și amplitudine scăzută. Ca urmare, detecția acestora se efectuează pe scala 1 și se bazează pe detecția primei linii de valoare maximă plasate înaintea perechii minim-maxim generate de unda R, respectiv sfârșitul complexului QRS se bazează pe detecția perechii de valori extreme plasate după cea generată de unda R. În ambele situații perechile de valori minimă și maximă se caută pe ferestre de timp de durată precizată în jurul undei R.

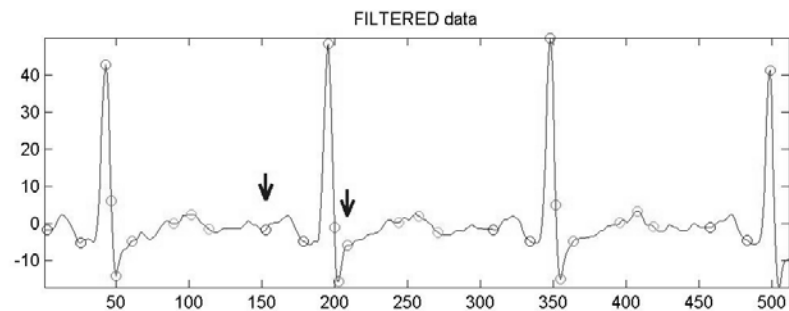
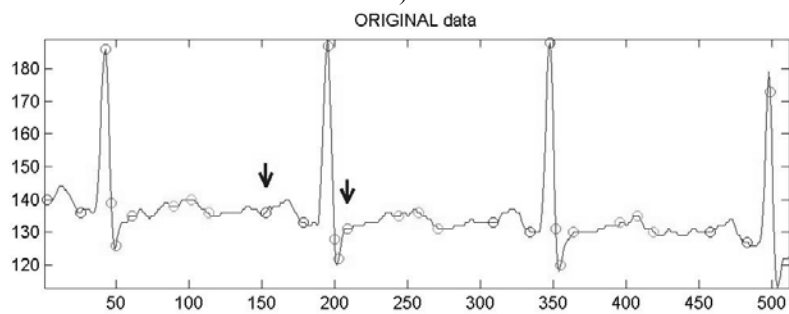
- *Detecția undelor T și P:* acestea sunt unde de frecvență joasă și sunt detectate pe scala 4, urmărind prezența acelorași perechi de valori minimă și maximă plasate în ferestre de timp de lungime precizată, de o parte și de alta a undei R.

Prezentăm în Fig. 2.19-2.20 o serie de rezultate experimentale obținute în urma analizei unor semnale ECG reale, corespunzătoare unor persoane sănătoase, respectiv suferind de afecțiuni cardiace specifice. Sunt incluse formele de undă originale, cele rezultate în urma eliminării componentelor cu frecvențe mai mici decât banda filtrului de pe scala  $S_5$ , respectiv componentele de detaliu rezultate din aplicarea DWT pe scalele  $S_1$ - $S_4$ .

Să menționăm în final că în electrocardiografie se culeg simultan mai multe semnale (denumite *derivații*), provenind de la electrozi plasați în poziții standardizate. În unele situații în care semnalul ECG este afectat de semnale perturbatoare foarte puternice sau afecțiunile pacientului sunt severe, este necesar ca analiza precedentă să fie efectuată asupra mai multor derivații pentru a putea trage o concluzie conformă cu realitatea.



a)

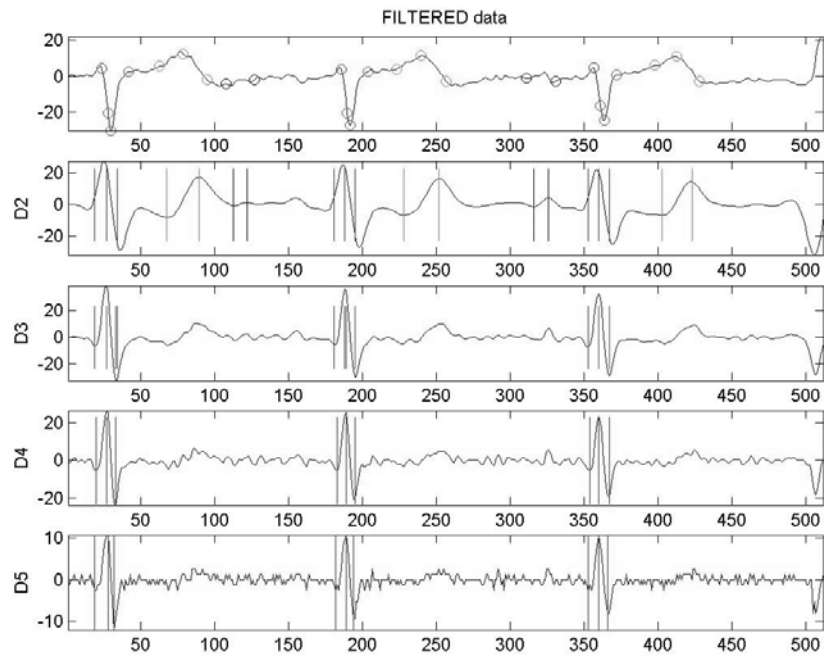


b)

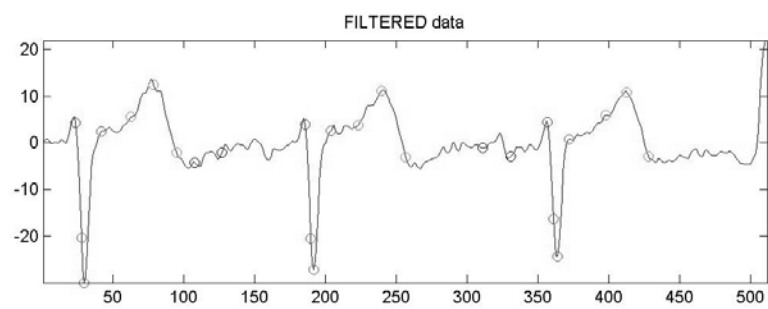
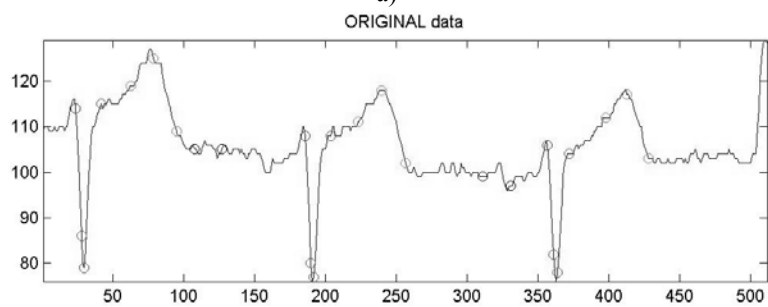
**Fig. 2.19** Exemplu de analiză a unui semnal ECG:

a) descompunere multirezoluție; b) forma de undă originală și cea filtrată trece-sus





a)



b)

**Fig. 2.20** Exemplu de analiză a unui semnal ECG:  
a) descompunere multirezoluție; b) forma de undă originală și cea filtrată trece-sus

**Bibliografie:**

- [1] Burt, P., Adelson, E.H., "The Laplacian pyramid as a compact image code", *IEEE Trans. Comm.*, vol. 31, pp. 532–540, 1983
- [2] Coifman, R., Wickerhauser, M., "Entropy-based algorithms for best basis selection," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, pp. 713–718, 1992
- [3] Daubechies, I., *Ten lectures on wavelets*, Philadelphia: SIAM, 1992
- [4] Donoho, D.L., Johnstone, I.M., "Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage," *Biometrika*, vol. 81, pp. 425–455, 1994
- [5] Donoho, D.L., "De-noising by soft thresholding", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 41, pp. 613–627, 1995
- [6] A. Graps, "An introduction to wavelets", *IEEE Comput. Sci. Eng.*, vol. 2, no. 2, pp. 50-61, 1995
- [7] Gröchenig, K., "Irregular sampling of wavelet and short time Fourier transforms", *Constr. Approx.*, vol. 9, pp. 283-297, 1993
- [8] Kadambi S, Murray R, Boudreaux-Bartels F, "Wavelet Transform-Based QRS Complex Detector", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 46, no. 7, pp. 838-847, 1999
- [9] Kingsbury, N.G., "Image processing with complex wavelets", *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, vol. 357, pp. 2543–2560, 1999
- [10] Li C, Zheng C, Tai C., "Detection of ECG characteristic points using wavelet transforms", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 42, no. 1, pp. 21–28, 1995
- [11] Mallat, S. G., "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", *IEEE Trans. PAMI*, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, 1989
- [12] Mallat, S., Zhong, S., "Characterization of signals from multiscale edges," *IEEE Trans. PAMI*, vol. 14, pp. 710–732, 1992
- [13] Mallat, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, New York: Academic, 1998
- [14] Papoulis, A., *Signal Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1977
- [15] Polikar, R., *The wavelet tutorial*, disponibil on-line la adresa: <http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>
- [16] Press, W., H., Teukolsy, S.A., Vetterling, W.T., Flanery, B.P., *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1992
- [17] Rao, R.M., Bopardikar, A.S., *Wavelet Transforms: Introduction to the theory and applications*, Addison-Wesley, 1998
- [18] Strang, G. S, "Wavelets and dilation equation", *SIAM Review*, vol. 31, pp. 613–627, 1989
- [19] Vaidyanathan, P.P., *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993
- [20] Vetterli M., C. Herley, "Wavelets and filter banks: theory and design", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 40, no. 9, pp. 2207-2232, 1992
- [21] WSQ, Los Alamos ftp site: [www3.lanl.gov/pub/misc/WSQ](http://www3.lanl.gov/pub/misc/WSQ)